Corso di Algebra - a.a. 2005-2006

Prova scritta del 19.6.2006 – soluzioni

1. S_3 è generato da due elementi g e h, di ordini rispettivamente 2 e 3. Il prodotto $k = gh$ ha ordine 2. Anche g e k generano S_3 perchè $h = g^{-1}k$. D'altra parte l'ordine di S_3 è 6, e non una potenza di 2.

2. (a) G è unione delle classi laterali sinistre hK, dove h varia in H. Dunque ogni elemento di G è della forma hk, dove $h \in H$ e $k \in K$; in altre parole $G = HK$. Poiché G è normale $Kh = hK$ per ogni h, e quindi G è anche uguale a KH.

   (b) Siano g e g' elementi di G. Possiamo scrivere $g = hk$, $g' = h'k'$, dove $h, h' \in H$ e $k, k' \in K$. Allora $gg' = hkh'k' = hh'kk'$ perchè k appartiene al centro di G, $hh'kk' = h'hk'k$ perchè sia H che K sono abeliani, e $h'hk'k = h'k'hk = g'g$ perchè k' appartiene al centro di G. In conclusione $gg' = g'g$.

3. (a) Dato che $I \subset I + J$, $I^e \subset (I + J)^e$. Analogamente, $J^e \subset (I + J)^e$. Quindi $I^e + J^e \subset (I + J)^e$. Viceversa, dato che f è un omomorfismo, ogni elemento di $f(I + J)$ è della forma $f(i + j) = f(i) + f(j)$, dove $i \in I$ e $j \in J$. Quindi $f(I + J) \subset f(I) + f(J) \subset I^e + J^e$. Ne segue che $(I + J)^e \subset I^e + J^e$.

   (b) I^eJ^e è generato da tutti gli elementi della forma $i'j'$, dove $i' \in I^e$ e $j' \in J^e$. Segue dunque dalla definizione di I^e e J^e che I^eJ^e è generato da tutti i prodotti $f(i)f(j) = f(ij)$, dove $i \in I$ e $J \in J$. D'altra parte IJ è generato da tutti i prodotti ij, $i \in I$, $j \in J$, quindi $(IJ)^e$ è generato da tutti gli elementi $f(ij)$, come I^eJ^e. Dunque $(IJ)^e = I^eJ^e$.

4. $A = K[X]/(X^4 + 7)$ è un dominio se e solo se l'ideale $(X^4 + 7)$ è primo, cioè se e solo se il polinomio $P(X) = X^4 + 7$ è irriducibile. Quando $K = \mathbb{Q}$, $P(X)$ è irriducibile per il criterio di Eisenstein. Se $P(X)$ fosse irriducibile nel caso $K = \mathbb{R}$, A sarebbe una estensione algebrica di grado 4 di $\mathbb{R}$. Dato che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso (teorema fondamentale dell'algebra), A dovrebbe essere un sottocampo di $\mathbb{C}$, in contraddizione con il fatto che $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$. Più semplicemente si può notare che $P(X) = (X^2 + \sqrt{2}\sqrt[4]{7}X + \sqrt{7})(X^2 - \sqrt{2}\sqrt[4]{7}X + \sqrt{7})$. Quindi nel caso (b) A non è un dominio. Nel caso (c) $P(X) = X^4 + 1 = (X + 1)^4$, che non è irriducibile; quindi A non è un dominio.

5. La risposta è $[L : F] = 2$. Per vederlo scriviamo

$$X^6 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)$$

   e notiamo che $X^2 + X + 1$ non ha radici in F, come si vede per ispezione diretta. Questo polinomio è dunque irriducibile su F. Sia ξ una sua radice in una estensione di F. Dico che $L = F[\xi]$. Per mostrarlo basta dimostrare che $X^2 - X + 1$ ha una radice in $F[\xi]$. Ma questo è chiaro, dato che $(-\xi)^2 - (-\xi) + 1 = \xi^2 + \xi + 1 = 0$.