

Programma di Algebra Superiore

A. A. 2025/2026

Docente: Alberto Canonaco

Richiami di teoria degli anelli (con unità, non necessariamente commutativi). Un anello non nullo in cui ogni elemento non nullo è invertibile a sinistra è un anello con divisione. Anello opposto A^{op} di un anello A ; gli ideali destri di A sono gli ideali sinistri di A^{op} .

Moduli (sinistri) su un anello; dare una struttura di A -modulo su un gruppo abeliano M equivale a dare un omomorfismo di anelli $A \rightarrow \text{End}(M)$. Se K è un campo, un K -modulo è un K -spazio vettoriale; ogni gruppo abeliano ha un'unica struttura di \mathbb{Z} -modulo. Moduli destri su un anello; gli A -moduli destri possono essere identificati con gli A^{op} -moduli sinistri.

Sottomoduli; gli A -sottomoduli di A sono gli ideali sinistri di A . Moduli semplici; A è un A -modulo semplice se e solo se A è un anello con divisione. L'intersezione di sottomoduli, la somma di sottomoduli e il prodotto di un ideale sinistro per un sottomodulo sono sottomoduli. Sottomodulo generato da un sottoinsieme e insiemi di generatori di un modulo; moduli finitamente generati e moduli ciclici. Annullatore di un sottoinsieme di un modulo (ideale sinistro); l'annullatore di un modulo è un ideale.

Omomorfismi e isomorfismi di moduli. Immagine e controimmagine di sottomoduli attraverso un omomorfismo sono sottomoduli (in particolare, nucleo e immagine di un omomorfismo sono sottomoduli). Gli omomorfismi tra due A -moduli M e N formano un gruppo abeliano $\text{Hom}_A(M, N)$; la composizione di omomorfismi è bilineare.

Quoziente M/M' di un modulo M per un sottomodulo M' ; la proiezione naturale $M \rightarrow M/M'$ è un omomorfismo suriettivo di moduli con nucleo M' ; i sottomoduli di M/M' sono tutti e soli della forma M''/M' con M'' sottomodulo di M contenente M' . Teoremi di omomorfismo e di isomorfismo per moduli. Un A -modulo è ciclico (rispettivamente semplice) se e solo se è isomorfo a A/I per qualche ideale sinistro (rispettivamente ideale sinistro massimale) I di A . Conucleo di un omomorfismo di moduli; il conucleo è nullo se e solo se l'omomorfismo è suriettivo.

Prodotto e somma diretta (o coprodotto) di moduli e loro proprietà universali; somma diretta di sottomoduli. Insiemi linearmente indipendenti e basi di un modulo; moduli liberi. Un omomorfismo da un modulo libero è univocamente determinato dalle immagini degli elementi di una base, che possono essere scelte arbitrariamente. Un A -modulo è libero se e solo se è isomorfo a una somma diretta di copie di A . Ogni modulo è isomorfo a un quoziente di un modulo libero; un A -modulo è finitamente generato se e solo se è isomorfo a un quoziente di A^n

per qualche $n \in \mathbb{N}$. Tutti gli A -moduli sono liberi se e solo se A è un anello con divisione (solo enunciato). Tutte le basi di un A -modulo libero hanno la stessa cardinalità (detta rango del modulo) se esiste un omomorfismo di anelli da A verso un anello con divisione (solo enunciato), vero in particolare se A è commutativo.

Restrizione degli scalari attraverso un omomorfismo di anelli. Algebre su un anello commutativo e omomorfismi di algebre; ogni anello ha un'unica struttura di \mathbb{Z} -algebra e gli omomorfismi di \mathbb{Z} -algebre sono gli omomorfismi di anelli.

Addendi diretti di un modulo; un sottomodulo M' di un modulo M è un addendo diretto se e solo se l'inclusione $M' \rightarrow M$ è invertibile a sinistra se e solo se la proiezione al quoziente $M \rightarrow M/M'$ è invertibile a destra; se M/M' è libero, allora M' è un addendo diretto di M . Moduli indecomponibili e moduli semisemplici; un modulo è semisemplice se e solo se è somma (diretta) di sottomoduli semplici (solo enunciato). Anelli semisemplici; A è semisemplice se e solo se tutti gli A -moduli sono semisemplici; teorema di Wedderburn-Artin (solo enunciato). Teorema di struttura per moduli finitamente generati su un dominio a ideali principali (solo enunciato).

Complessi e successioni esatte di moduli; moduli finitamente presentati; lemma del serpente. Moduli noetheriani e moduli artiniani; data una successione esatta corta di moduli, il termine centrale è noetheriano/artiniano se e solo se lo sono gli altri due termini. Un modulo è noetheriano se e solo se ogni suo sottomodulo è finitamente generato. Anelli noetheriani e anelli artiniani (a sinistra). Se A è noetheriano, un A -modulo è noetheriano se e solo se è finitamente generato. Se A è artiniano, è anche noetheriano e un A -modulo è artiniano se e solo se è noetheriano (solo enunciato). Teorema della base di Hilbert (solo enunciato). Proprietà dei moduli finitamente presentati rispetto alle successioni esatte corte; tutti gli A -moduli finitamente generati sono finitamente presentati se e solo se A è noetheriano. Moduli coerenti e anelli coerenti (a sinistra); ogni anello noetheriano è coerente, ma non viceversa. Proprietà dei moduli coerenti rispetto alle successioni esatte corte; nucleo e conucleo di un omomorfismo tra moduli coerenti sono coerenti; tutti gli A -moduli finitamente presentati sono coerenti se e solo se A è coerente.

Categorie e categorie piccole (in cui gli oggetti formano un insieme); categorie concrete, come **Set** degli insiemi, **Top** degli spazi topologici, **Grp** dei gruppi, **Rng** degli anelli, $A\text{-Mod}/\text{Mod-}A$ degli A -moduli sinistri/destri (con A anello) e $A\text{-Alg}$ delle A -algebre (con A anello commutativo); preordini come categorie con al più un morfismo tra due oggetti; monoidi come categorie con un solo oggetto. Categoria opposta \mathbf{C}^{op} di una categoria \mathbf{C} . Prodotto di categorie. Sottocategorie e sottocategorie piene; $\mathbf{Ab}/\mathbf{CRng}$ sottocategoria piena di $\mathbf{Grp}/\mathbf{Rng}$ costituita dai gruppi/anelli commutativi. Congruenze su una categoria e quoziente di una categoria per una congruenza. Morfismi invertibili a sinistra o a destra e isomorfismi; un morfismo è un isomorfismo se e solo se è invertibile a sinistra e a destra. Mono(morfismi) e

epi(morfismi); ogni morfismo invertibile a sinistra/destra è un mono/epi; in $A\text{-Mod}$ e in $\text{Mod-}A$ un morfismo è un mono/epi se e solo se è iniettivo/suriiettivo.

Funtori (covarianti) tra categorie; ogni funtore preserva i morfismi invertibili a sinistra o a destra e gli isomorfismi. Funtori controvarianti $C \rightarrow D$ come funtori (covarianti) $C^{\text{op}} \rightarrow D$; funtore opposto $F^{\text{op}}: C^{\text{op}} \rightarrow D^{\text{op}}$ di un funtore $F: C \rightarrow D$. Funtori dimenticanti tra categorie concrete; i funtori tra due monoidi sono gli omomorfismi di monoidi; per ogni oggetto X di una categoria C ci sono funtori $C(X, -) = \text{Hom}_C(X, -): C \rightarrow \text{Set}$ e $C(-, X) = \text{Hom}_C(-, X): C^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Funtore identità di una categoria e composizione di funtori; categoria Cat delle categorie (piccole). Funtori fedeli, pieni e pienamente fedeli; isomorfismi di categorie; un funtore è un isomorfismo se e solo se è biunivoco sugli oggetti e pienamente fedele; ci sono isomorfismi di categorie $\text{Mod-}A \cong A^{\text{op}}\text{-Mod}$, $\mathbb{Z}\text{-Mod} \cong \text{Ab}$, $\mathbb{Z}\text{-Alg} \cong \text{Rng}$. Funtori essenzialmente iniettivi e essenzialmente suriettivi; ogni funtore pienamente fedele è essenzialmente iniettivo.

Trasformazioni naturali tra funtori. Identità di un funtore e composizione verticale di trasformazioni naturali; categoria $\text{Fun}(C, D)$ dei funtori tra due categorie C e D (con C piccola); isomorfismi di funtori; per un funtore le proprietà di essere fedele, pieno, essenzialmente iniettivo e essenzialmente suriiettivo sono invarianti per isomorfismo. Composizione orizzontale di trasformazioni naturali; l'isomorfismo di funtori è una congruenza su Cat . Equivalenze di categorie; un funtore è un'equivalenza se e solo se è pienamente fedele e essenzialmente suriiettivo.

Categorie preaddittive; $A\text{-Mod}$ è preadditiva; anelli come categorie preaddittive con un solo oggetto; se A è preadditiva, lo sono anche A^{op} e ogni sottocategoria piena di A ; ideali in una categoria preadditiva e quozienti per ideali. Funtori additivi tra categorie preaddittive; i funtori additivi tra anelli sono gli omomorfismi di anelli; per ogni oggetto X di una categoria preadditiva A i funtori $A(X, -): A \rightarrow \text{Ab}$ e $A(-, X): A^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ sono additivi. $\text{Fun}(C, A)$ è preadditiva se A lo è; se inoltre C è preadditiva, anche la sottocategoria piena $\text{AddFun}(C, A)$ di $\text{Fun}(C, A)$ con oggetti i funtori additivi è preadditiva; $A\text{-Mod} \cong \text{AddFun}(A, \text{Ab})$. Una categoria può avere più di una struttura di categoria preadditiva; se $F: C \rightarrow A$ è un funtore pienamente fedele con A preadditiva, esiste un'unica struttura preadditiva su C che rende F additivo.

Prodotti e coprodotti in una categoria; oggetti terminali, iniziali e nulli; preservazione di (co)prodotti da parte di un funtore. Biprodotto in una categoria preadditiva; un oggetto è un biprodotto di un insieme finito di oggetti se e solo se ne è un prodotto se e solo se ne è un coprodotto; un funtore additivo tra categorie preaddittive $A \rightarrow B$ preserva i biprodotti, e dunque i (co)prodotti finiti che esistono in A . Categorie additive; $A\text{-Mod}$ è additiva; se A è additiva, lo sono anche A^{op} , ogni sottocategoria piena di A chiusa per (co)prodotti finiti e ogni quoziente di A per un ideale; $\text{Fun}(C, A)$ è additiva se A lo è; se inoltre C è preadditiva, anche $\text{AddFun}(C, A)$ è additiva. Un funtore tra categorie additive è additivo se

preserva i (co)prodotti finiti; in una categoria additiva la struttura preadditiva è univocamente determinata; una categoria equivalente a una categoria additiva è additiva.

Limiti e colimiti in una categoria; (co)prodotti, (co)equalizzatori e (co)prodotti fibrati come casi particolari di (co)limiti; unicità a meno di unico isomorfismo dei (co)limiti e loro naturalità. Esistono i (co)limiti dei funtori $L \rightarrow C$ se in C esistono i (co)equalizzatori e i (co)prodotti indicizzati da oggetti e morfismi di L ; una categoria è (finitamente) (co)completa, cioè ha i (co)limiti (finiti) se e solo se ha (co)equalizzatori e (co)prodotti (finiti). Preservazione di (co)limiti da parte di un funtore; se C è (finitamente) (co)completa, un funtore $C \rightarrow D$ preserva i (co)limiti (finiti) se e solo se preserva i (co)prodotti (finiti) e i (co)equalizzatori. Se esistono i (co)limiti dei funtori $L \rightarrow D$, allora esistono i (co)limiti dei funtori $L \rightarrow \text{Fun}(C, D)$ per ogni categoria C , e si calcolano puntualmente. Per ogni $X \in C$ i funtori $C(X, -): C \rightarrow \text{Set}$ e $C(-, X): C^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ preservano i limiti.

Nucleo e conucleo di un morfismo in una categoria preadditiva; categorie preabeliane; una categoria preabeliana è finitamente completa e cocompleta; $A\text{-Mod}$ è preabeliana; se A è preabeliana, lo sono anche A^{op} e ogni sottocategoria piena di A chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei; $\text{Fun}(C, A)$ è preabeliana se A lo è; se inoltre C è preadditiva, anche $\text{AddFun}(C, A)$ è preabeliana.

In una categoria preadditiva ogni nucleo/conucleo è un mono/epi; in una categoria additiva un morfismo è un mono/epi se e solo ha nucleo/conucleo 0; immagine e coimmagine di un morfismo in una categoria preabeliana. Categorie abeliane; in una categoria abeliana ogni mono/epi coincide con la propria immagine/coimmagine; $A\text{-Mod}$ è abeliana; se A è abeliana, lo sono anche A^{op} e ogni sottocategoria piena di A chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei; $\text{Fun}(C, A)$ è abeliana se A lo è; se inoltre C è preadditiva, anche $\text{AddFun}(C, A)$ è abeliana. In una categoria abeliana un morfismo è un isomorfismo se e solo se è un mono e un epi. Per ogni morfismo f in una categoria preabeliana A c'è un morfismo naturale $\text{Coim}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$; tale morfismo è un isomorfismo per ogni f in A se e solo se A è abeliana. Ogni morfismo in una categoria abeliana è in modo essenzialmente unico composizione di un epi e di un mono.

Complessi in una categoria preadditiva e successioni esatte in una categoria abeliana; successioni esatte corte e loro spezzamento; ogni funtore additivo tra categorie abeliane preserva le successioni esatte corte che si spezzano; categorie abeliane semisemplici (cioè in cui tutte le successioni esatte corte si spezzano); $A\text{-Mod}$ è semisemplice se e solo se A lo è. Funtori esatti a sinistra e/o a destra tra categorie abeliane; condizioni equivalenti all'esattezza a sinistra e/o a destra; funtori esatti al centro. Per ogni oggetto X di una categoria abeliana A i funtori $A(X, -): A \rightarrow \text{Ab}$ e $A(-, X): A^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ sono esatti a sinistra. Una successione è esatta se lo è la sua immagine attraverso un funtore esatto e fedele; teorema di Freyd-Mitchell (solo enunciato); lemma del serpente in una categoria abeliana.

(A, B) -bimoduli; gli (A, B) -bimoduli possono essere identificati con i $(B^{\text{op}}, A^{\text{op}})$ -bimoduli; A è un (A, A) -bimodulo (o A -bimodulo); se A è commutativo e B è una A -algebra, allora ogni B -modulo sinistro/destro è un $(B, A)/(A, B)$ -bimodulo (in particolare ogni A -modulo è un A -bimodulo). Se M è un (A, B) -bimodulo e N un (A, C) -bimodulo, allora $\text{Hom}_A(M, N)$ è un (B, C) -bimodulo; se A è commutativo, B è una A -algebra e M e N sono B -moduli, allora $\text{Hom}_B(M, N)$ è un A -(bi)modulo (in particolare $\text{Hom}_A(M, N)$ è un A -modulo se M e N sono A -moduli). Un (A, B) -bimodulo M induce funtori $\text{Hom}_A(M, -): A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ e $\text{Hom}_A(-, M): (A\text{-Mod})^{\text{op}} \rightarrow B\text{-Mod}$; il funtore $\text{Hom}_A(A, -): A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ è isomorfo a $\text{id}_{A\text{-Mod}}$.

Prodotto tensoriale $M \otimes_A N$ di $M \in \text{Mod-}A$ e $N \in A\text{-Mod}$ (definito attraverso una proprietà universale di funzioni A -bilanciate da $M \times N$ a un gruppo abeliano); esistenza e unicità a meno di unico isomorfismo del prodotto tensoriale; $M \otimes_A N \cong N \otimes_{A^{\text{op}}} M$; functorialità del prodotto tensoriale in entrambi gli argomenti. Se M è un (B, A) -bimodulo e N un (A, C) -bimodulo, allora $M \otimes_A N$ è un (B, C) -bimodulo; associatività a meno di isomorfismo del prodotto tensoriale; se A è commutativo e M e N sono A -moduli, allora $M \otimes_A N$ è un A -modulo e può essere equivalentemente definito attraverso una proprietà universale di funzioni A -bilineari da $M \times N$ a un A -modulo. Un (B, A) -bimodulo M definisce un funtore $M \otimes_A -: A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$.

Funtori aggiunti; unità e counità di un'aggiunzione; un'equivalenza è aggiunto sinistro e destro di un suo quasi-inverso. Un funtore aggiunto di un funtore additivo tra categorie preadditive è additivo; un funtore aggiunto sinistro/destro preserva i colimiti/limiti (in particolare è esatto a destra/sinistra se le categorie sono abeliane), quindi un'equivalenza preserva i limiti e i colimiti; una categoria equivalente a una categoria (pre)abeliana è (pre)abeliana.

Se M è un (B, A) -bimodulo, il funtore $M \otimes_A -: A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ è aggiunto sinistro di $\text{Hom}_B(M, -): B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$; il prodotto tensoriale è esatto a destra e preserva le somme dirette in entrambi gli argomenti; il funtore $A \otimes_A -: A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ è isomorfo a $\text{id}_{A\text{-Mod}}$. Un omomorfismo di anelli $f: A \rightarrow B$ induce un funtore $f^*: B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ (restrizione degli scalari), che ha aggiunto sinistro $f_! := B \otimes_A -$ (estensione degli scalari, vedendo B come (B, A) -bimodulo) e aggiunto destro $f_* := \text{Hom}_A(B, -)$ (coestensione degli scalari, vedendo B come (A, B) -bimodulo); se I è un ideale di A e $\pi: A \rightarrow A/I$ è la proiezione al quoziente, c'è un isomorfismo naturale $\pi_!(M) \cong M/IM$ per ogni A -modulo M .

Oggetti proiettivi e oggetti iniettivi in una categoria abeliana; tutti gli oggetti sono proiettivi se e solo se tutti gli oggetti sono iniettivi se e solo se la categoria è semisemplice. Un coprodotto/prodotto è proiettivo/iniettivo se e solo se lo è ogni termine. I moduli proiettivi sono gli addendi diretti dei moduli liberi. Moduli piatti; una somma diretta di moduli è piatta se e solo se lo è ogni termine; ogni mo-

dulo proiettivo è piatto. Un A -modulo M è iniettivo se e solo se ogni omomorfismo $I \rightarrow M$ (con I ideale sinistro di A) può essere esteso a un omomorfismo $A \rightarrow M$. Su un dominio d'integrità un modulo iniettivo è divisibile e il viceversa vale su un dominio a ideali principali. Categorie abeliane con abbastanza proiettivi/iniettivi; $A\text{-Mod}$ ha abbastanza proiettivi e abbastanza iniettivi. Un A -modulo destro M è piatto se e solo se l' A -modulo sinistro $\text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ è iniettivo; su un dominio d'integrità un modulo piatto è senza torsione, e il viceversa vale su un dominio a ideali principali. Su un dominio a ideali principali un sottomodulo di un modulo libero è libero (solo enunciato), quindi un modulo è proiettivo se e solo se è libero.

Categoria $C(A)$ dei complessi (coomologici) di una categoria preadditiva A ; se A è (pre)additiva o (pre)abeliana, anche $C(A)$ lo è. Omotopia tra morfismi in $C(A)$; i morfismi omotopi a 0 formano un ideale in $C(A)$, e il corrispondente quoziente costituisce la categoria omotopa $K(A)$; se A è additiva, anche $K(A)$ lo è (ma in generale $K(A)$ non è preabeliana se A è abeliana). Se A è abeliana, ci sono funtori additivi (di coomologia) $H^i: C(A) \rightarrow A$ e $H^i: K(A) \rightarrow A$ per ogni intero i ; successione esatta lunga di coomologia indotta da una successione esatta corta in $C(A)$. Un funtore additivo tra categorie preaddittive $F: A \rightarrow B$ induce funtori additivi $F: C(A) \rightarrow C(B)$ e $F: K(A) \rightarrow K(B)$.

Risoluzioni sinistre (in particolare proiettive) e risoluzioni destre (in particolare iniettive) di un oggetto in una categoria abeliana; ogni oggetto ha risoluzioni proiettive/iniettive se la categoria ha abbastanza proiettivi/iniettivi. Se A è abeliana con abbastanza iniettivi, la scelta di una risoluzione iniettiva di ogni oggetto di A si estende in modo unico a un funtore additivo $I: A \rightarrow K(A)$, e scelte diverse inducono funtori isomorfi. Se B è un'altra categoria abeliana, l' i -esimo funtore derivato destro di un funtore additivo $F: A \rightarrow B$ è il funtore additivo $R^iF: A \rightarrow B$ (ben definito a meno di isomorfismo) ottenuto come composizione $A \xrightarrow{I} K(A) \xrightarrow{F} K(B) \xrightarrow{H^i} B$. Successione esatta lunga dei funtori derivati indotta da una successione esatta corta in A ; naturalità dei morfismi $R^i \rightarrow R^{i+1}$ nella successione esatta lunga rispetto al funtore e alle successioni esatte corte (solo enunciato); F è esatto a sinistra se e solo se $R^0F \cong F$; F è esatto se e solo se $R^0F \cong F$ e $R^iF \cong 0$ per $i > 0$ (basta $i = 1$). Funtori derivati sinistri (se A ha abbastanza proiettivi) $L_iF := (R^iF^{\text{op}})^{\text{op}}$.

$\text{Ext}_A^i(-, =): A^{\text{op}} \times A \rightarrow \mathbf{Ab}$ come funtori derivati destri di $\text{Hom}_A(-, =)$ calcolati nel primo (se A ha abbastanza proiettivi) o nel secondo (se A ha abbastanza iniettivi) argomento; in entrambi i casi una successione esatta corta in ciascun argomento induce una successione esatta lunga degli Ext_A^i ; equivalenza delle due definizioni quando A ha sia abbastanza iniettivi che abbastanza proiettivi. $\text{Tor}_i^A(-, =): \mathbf{Mod}\text{-}A \times A\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ come funtori derivati sinistri di $-\otimes_A =$ calcolati equivalentemente nel primo o nel secondo argomento. Calcolo di Ext_A^i e Tor_i^A quando A è un dominio a ideali principali.

Cenni su: dimensione iniettiva/proiettiva di un oggetto in una categoria abelia-

na con abbastanza iniettivi/proiettivi e dimensione globale della categoria; identificazione di $\text{Ext}_A^i(X, Y)$ con classi di equivalenza di successioni esatte della forma $0 \rightarrow Y \rightarrow Z_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Z_i \rightarrow X \rightarrow 0$; definizione dei funtori derivati destri/sinistri di un funtore additivo $F: A \rightarrow B$ tra categorie abeliane con ipotesi su A più deboli di avere abbastanza iniettivi/proiettivi.

Categoria $\text{PSh}(X, C)$ dei prefasci su uno spazio topologico X a valori in una categoria C ; prefasci separati e fasci quando C è concreta; sottocategoria piena $\text{Sh}(X, C)$ di $\text{PSh}(X, C)$ con oggetti i fasci; fasci dati da funzioni verso un oggetto di C ; fascio (localmente) costante $S_X \in \text{Sh}(X, C)$ di valore $S \in C$. Spazi anellati; categoria abeliana $\mathcal{O}_X\text{-PMod}$ dei prefasci di moduli su uno spazio anellato (X, \mathcal{O}_X) e sua sottocategoria piena $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ dei fasci di moduli; $\mathcal{O}_X\text{-Mod} \cong \mathcal{O}_X(X)\text{-Mod}$ se $X \neq \emptyset$ ha la topologia banale; $A_X\text{-Mod} \cong \text{Sh}(X, A\text{-Mod})$ per ogni anello A .

Morfismi iniettivi, localmente iniettivi, suriettivi e localmente suriettivi di prefasci; un morfismo iniettivo/suriiettivo lo è anche localmente; un morfismo localmente iniettivo da un prefascio separato è iniettivo; in generale un morfismo localmente suriettivo di fasci non è suriettivo. Per ogni prefascio \mathcal{F} esiste unico a meno di isomorfismo un morfismo localmente biunivoco $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^a$ con \mathcal{F}^a fascio (detto associato a \mathcal{F}), e da questo si ottiene un funtore “fascio associato” $\text{PSh}(X, C) \rightarrow \text{Sh}(X, C)$ (rispettivamente $\mathcal{O}_X\text{-PMod} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}$) aggiunto sinistro dell’inclusione $\text{Sh}(X, C) \rightarrow \text{PSh}(X, C)$ (rispettivamente $\mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{-PMod}$). Per ogni spazio anellato (X, \mathcal{O}_X) la categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ è abeliana con nuclei quelli di $\mathcal{O}_X\text{-PMod}$, conuclei ottenuti da quelli di $\mathcal{O}_X\text{-PMod}$ prendendo il fascio associato, mono i morfismi (localmente) iniettivi e epi i morfismi localmente suriettivi.

Prodotti e coprodotti di fasci. Insiemi filtranti e colimiti filtranti; calcolo dei colimiti filtranti in categorie concrete. Spiga di un prefascio in un punto; un morfismo di prefasci è localmente iniettivo se e solo se è iniettivo sulle spighe. $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ ha abbastanza iniettivi per ogni spazio anellato (X, \mathcal{O}_X) . Il funtore $\Gamma(X, -): \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X(X)\text{-Mod}$ che manda un fascio \mathcal{F} nelle sezioni globali $\mathcal{F}(X)$ è esatto a sinistra (ma in generale non a destra); coomologia dei fasci $H^i(X, -) := R^i\Gamma(X, -)$.

Cenni su: relazioni tra la coomologia dei fasci e altre teorie coomologiche; funtori $\mathcal{H}om_X(-, =): \mathcal{O}_X\text{-Mod}^{\text{op}} \times \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}_X\text{-Mod}$ (esatto a sinistra in entrambi gli argomenti) e $-\otimes_X =: \mathcal{O}_X\text{-Mod} \times \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}_X\text{-Mod}$ (esatto a destra in entrambi gli argomenti) e loro funtori derivati; fasci di tipo finito, fasci di presentazione finita e fasci coerenti.