

## Programma di Algebra Superiore

A. A. 2025/2026

Docente: Alberto Canonaco

Richiami di teoria degli anelli (con unità, non necessariamente commutativi). Un anello non nullo in cui ogni elemento non nullo è invertibile a sinistra è un anello con divisione. Anello opposto  $A^{\text{op}}$  di un anello  $A$ ; gli ideali destri di  $A$  sono gli ideali sinistri di  $A^{\text{op}}$ .

Moduli (sinistri) su un anello; dare una struttura di  $A$ -modulo su un gruppo abeliano  $M$  equivale a dare un omomorfismo di anelli  $A \rightarrow \text{End}(M)$ . Se  $K$  è un campo, un  $K$ -modulo è un  $K$ -spazio vettoriale; ogni gruppo abeliano ha un'unica struttura di  $\mathbb{Z}$ -modulo. Moduli destri su un anello; gli  $A$ -moduli destri possono essere identificati con gli  $A^{\text{op}}$ -moduli sinistri.

Sottomoduli; gli  $A$ -sottomoduli di  $A$  sono gli ideali sinistri di  $A$ . Moduli semplici;  $A$  è un  $A$ -modulo semplice se e solo se  $A$  è un anello con divisione. L'intersezione di sottomoduli, la somma di sottomoduli e il prodotto di un ideale sinistro per un sottomodulo sono sottomoduli. Sottomodulo generato da un sottoinsieme e insiemi di generatori di un modulo; moduli finitamente generati e moduli ciclici. Annullatore di un sottoinsieme di un modulo (ideale sinistro); l'annullatore di un modulo è un ideale.

Omomorfismi e isomorfismi di moduli. Immagine e controimmagine di sottomoduli attraverso un omomorfismo sono sottomoduli (in particolare, nucleo e immagine di un omomorfismo sono sottomoduli). Gli omomorfismi tra due  $A$ -moduli  $M$  e  $N$  formano un gruppo abeliano  $\text{Hom}_A(M, N)$ ; la composizione di omomorfismi è bilineare.

Quoziente  $M/M'$  di un modulo  $M$  per un sottomodulo  $M'$ ; la proiezione naturale  $M \rightarrow M/M'$  è un omomorfismo suriettivo di moduli con nucleo  $M'$ ; i sottomoduli di  $M/M'$  sono tutti e soli della forma  $M''/M'$  con  $M''$  sottomodulo di  $M$  contenente  $M'$ . Teoremi di omomorfismo e di isomorfismo per moduli. Un  $A$ -modulo è ciclico (rispettivamente semplice) se e solo se è isomorfo a  $A/I$  per qualche ideale sinistro (rispettivamente ideale sinistro massimale)  $I$  di  $A$ . Conucleo di un omomorfismo di moduli; il conucleo è nullo se e solo se l'omomorfismo è suriettivo.

Prodotto e somma diretta (o coprodotto) di moduli e loro proprietà universali; somma diretta di sottomoduli. Insiemi linearmente indipendenti e basi di un modulo; moduli liberi. Un omomorfismo da un modulo libero è univocamente determinato dalle immagini degli elementi di una base, che possono essere scelte arbitrariamente. Un  $A$ -modulo è libero se e solo se è isomorfo a una somma diretta di copie di  $A$ . Ogni modulo è isomorfo a un quoziente di un modulo libero; un  $A$ -modulo è finitamente generato se e solo se è isomorfo a un quoziente di  $A^n$

per qualche  $n \in \mathbb{N}$ . Tutti gli  $A$ -moduli sono liberi se e solo se  $A$  è un anello con divisione (solo enunciato). Tutte le basi di un  $A$ -modulo libero hanno la stessa cardinalità (detta rango del modulo) se esiste un omomorfismo di anelli da  $A$  verso un anello con divisione (solo enunciato), vero in particolare se  $A$  è commutativo.

Restrizione degli scalari attraverso un omomorfismo di anelli. Algebre su un anello commutativo e omomorfismi di algebre; ogni anello ha un'unica struttura di  $\mathbb{Z}$ -algebra e gli omomorfismi di  $\mathbb{Z}$ -algebre sono gli omomorfismi di anelli.

Addendi diretti di un modulo; un sottomodulo  $M'$  di un modulo  $M$  è un addendo diretto se e solo se l'inclusione  $M' \rightarrow M$  è invertibile a sinistra se e solo se la proiezione al quoziente  $M \rightarrow M/M'$  è invertibile a destra; se  $M/M'$  è libero, allora  $M'$  è un addendo diretto di  $M$ . Moduli indecomponibili e moduli semisemplici; un modulo è semisemplice se e solo se è somma (diretta) di sottomoduli semplici (solo enunciato). Anelli semisemplici;  $A$  è semisemplice se e solo se tutti gli  $A$ -moduli sono semisemplici; teorema di Wedderburn-Artin (solo enunciato). Teorema di struttura per moduli finitamente generati su un dominio a ideali principali (solo enunciato).

Complessi e successioni esatte di moduli; moduli finitamente presentati; lemma del serpente. Moduli noetheriani e moduli artiniani; data una successione esatta corta di moduli, il termine centrale è noetheriano/artiniano se e solo se lo sono gli altri due termini. Un modulo è noetheriano se e solo se ogni suo sottomodulo è finitamente generato. Anelli noetheriani e anelli artiniani (a sinistra). Se  $A$  è noetheriano, un  $A$ -modulo è noetheriano se e solo se è finitamente generato. Se  $A$  è artiniano, è anche noetheriano e un  $A$ -modulo è artiniano se e solo se è noetheriano (solo enunciato). Teorema della base di Hilbert (solo enunciato). Proprietà dei moduli finitamente presentati rispetto alle successioni esatte corte; tutti gli  $A$ -moduli finitamente generati sono finitamente presentati se e solo se  $A$  è noetheriano. Moduli coerenti e anelli coerenti (a sinistra); ogni anello noetheriano è coerente, ma non viceversa. Proprietà dei moduli coerenti rispetto alle successioni esatte corte; nucleo e conucleo di un omomorfismo tra moduli coerenti sono coerenti; tutti gli  $A$ -moduli finitamente presentati sono coerenti se e solo se  $A$  è coerente.

Categorie e categorie piccole (in cui gli oggetti formano un insieme); categorie concrete, come **Set** degli insiemi, **Top** degli spazi topologici, **Grp** dei gruppi, **Rng** degli anelli,  $A\text{-Mod}/\text{Mod-}A$  degli  $A$ -moduli sinistri/destri (con  $A$  anello) e  $A\text{-Alg}$  delle  $A$ -algebre (con  $A$  anello commutativo); preordini come categorie con al più un morfismo tra due oggetti; monoidi come categorie con un solo oggetto. Categoria opposta  $C^{\text{op}}$  di una categoria  $C$ . Prodotto di categorie. Sottocategorie e sottocategorie piene; **Ab/CRng** sottocategoria piena di **Grp/Rng** costituita dai gruppi/anelli commutativi. Congruenze su una categoria e quoziente di una categoria per una congruenza. Morfismi invertibili a sinistra o a destra e isomorfismi; un morfismo è un isomorfismo se e solo se è invertibile a sinistra e a destra. Mono(morfismi) e

epi(morfismi); ogni morfismo invertibile a sinistra/destra è un mono/epi; in  $A\text{-Mod}$  e in  $\text{Mod-}A$  un morfismo è un mono/epi se e solo se è iniettivo/suriiettivo.

Funtori (covarianti) tra categorie; ogni funtore preserva i morfismi invertibili a sinistra o a destra e gli isomorfismi. Funtori controvarianti  $C \rightarrow D$  come funtori (covarianti)  $C^{\text{op}} \rightarrow D$ ; funtore opposto  $F^{\text{op}}: C^{\text{op}} \rightarrow D^{\text{op}}$  di un funtore  $F: C \rightarrow D$ . Funtori dimenticanti tra categorie concrete; i funtori tra due monoidi sono gli omomorfismi di monoidi; per ogni oggetto  $X$  di una categoria  $C$  ci sono funtori  $C(X, -) = \text{Hom}_C(X, -): C \rightarrow \text{Set}$  e  $C(-, X) = \text{Hom}_C(-, X): C^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ . Funtore identità di una categoria e composizione di funtori; categoria  $\text{Cat}$  delle categorie (piccole). Funtori fedeli, pieni e pienamente fedeli; isomorfismi di categorie; un funtore è un isomorfismo se e solo se è biunivoco sugli oggetti e pienamente fedele; ci sono isomorfismi di categorie  $\text{Mod-}A \cong A^{\text{op}}\text{-Mod}$ ,  $\mathbb{Z}\text{-Mod} \cong \text{Ab}$ ,  $\mathbb{Z}\text{-Alg} \cong \text{Rng}$ . Funtori essenzialmente iniettivi e essenzialmente suriettivi; ogni funtore pienamente fedele è essenzialmente iniettivo.

Trasformazioni naturali tra funtori. Identità di un funtore e composizione verticale di trasformazioni naturali; categoria  $\text{Fun}(C, D)$  dei funtori tra due categorie  $C$  e  $D$  (con  $C$  piccola); isomorfismi di funtori; per un funtore le proprietà di essere fedele, pieno, essenzialmente iniettivo e essenzialmente suriiettivo sono invarianti per isomorfismo. Composizione orizzontale di trasformazioni naturali; l'isomorfismo di funtori è una congruenza su  $\text{Cat}$ . Equivalenze di categorie; un funtore è un'equivalenza se e solo se è pienamente fedele e essenzialmente suriiettivo.

Categorie preaddittive;  $A\text{-Mod}$  è preadditiva; anelli come categorie preaddittive con un solo oggetto; se  $A$  è preadditiva, lo sono anche  $A^{\text{op}}$  e ogni sottocategoria piena di  $A$ ; ideali in una categoria preadditiva e quozienti per ideali. Funtori additivi tra categorie preaddittive; i funtori additivi tra anelli sono gli omomorfismi di anelli; per ogni oggetto  $X$  di una categoria preadditiva  $A$  i funtori  $A(X, -): A \rightarrow \text{Ab}$  e  $A(-, X): A^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$  sono additivi.  $\text{Fun}(C, A)$  è preadditiva se  $A$  lo è; se inoltre  $C$  è preadditiva, anche la sottocategoria piena  $\text{AddFun}(C, A)$  di  $\text{Fun}(C, A)$  con oggetti i funtori additivi è preadditiva;  $A\text{-Mod} \cong \text{AddFun}(A, \text{Ab})$ . Una categoria può avere più di una struttura di categoria preadditiva; se  $F: C \rightarrow A$  è un funtore pienamente fedele con  $A$  preadditiva, esiste un'unica struttura preadditiva su  $C$  che rende  $F$  additivo.

Prodotti e coprodotti in una categoria; oggetti terminali, iniziali e nulli; preservazione di (co)prodotti da parte di un funtore. Biprodotto in una categoria preadditiva; un oggetto è un biprodotto di un insieme finito di oggetti se e solo se ne è un prodotto se e solo se ne è un coprodotto; un funtore additivo tra categorie preaddittive  $A \rightarrow B$  preserva i biprodotti, e dunque i (co)prodotti finiti che esistono in  $A$ . Categorie additive;  $A\text{-Mod}$  è additiva; se  $A$  è additiva, lo sono anche  $A^{\text{op}}$ , ogni sottocategoria piena di  $A$  chiusa per (co)prodotti finiti e ogni quoziente di  $A$  per un ideale;  $\text{Fun}(C, A)$  è additiva se  $A$  lo è; se inoltre  $C$  è preadditiva, anche  $\text{AddFun}(C, A)$  è additiva. Un funtore tra categorie additive è additivo se

preserva i (co)prodotti finiti; in una categoria additiva la struttura preadditiva è univocamente determinata; una categoria equivalente a una categoria additiva è additiva.

Limiti e colimiti in una categoria; (co)prodotti, (co)equalizzatori e (co)prodotti fibrati come casi particolari di (co)limiti; unicità a meno di unico isomorfismo dei (co)limiti e loro naturalità. Esistono i (co)limiti dei funtori  $L \rightarrow C$  se in  $C$  esistono i (co)equalizzatori e i (co)prodotti indicizzati da oggetti e morfismi di  $L$ ; una categoria è (finitamente) (co)completa, cioè ha i (co)limiti (finiti) se e solo se ha (co)equalizzatori e (co)prodotti (finiti). Preservazione di (co)limiti da parte di un funtore; se  $C$  è (finitamente) (co)completa, un funtore  $C \rightarrow D$  preserva i (co)limiti (finiti) se e solo se preserva i (co)prodotti (finiti) e i (co)equalizzatori. Se esistono i (co)limiti dei funtori  $L \rightarrow D$ , allora esistono i (co)limiti dei funtori  $L \rightarrow \text{Fun}(C, D)$  per ogni categoria  $C$ , e si calcolano puntualmente. Per ogni  $X \in C$  i funtori  $C(X, -): C \rightarrow \text{Set}$  e  $C(-, X): C^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$  preservano i limiti.

Nucleo e conucleo di un morfismo in una categoria preadditiva; categorie preabeliane; una categoria preabeliana è finitamente completa e cocompleta;  $A\text{-Mod}$  è preabeliana; se  $A$  è preabeliana, lo sono anche  $A^{\text{op}}$  e ogni sottocategoria piena di  $A$  chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei;  $\text{Fun}(C, A)$  è preabeliana se  $A$  lo è; se inoltre  $C$  è preadditiva, anche  $\text{AddFun}(C, A)$  è preabeliana.

In una categoria preadditiva ogni nucleo/conucleo è un mono/epi; in una categoria additiva un morfismo è un mono/epi se e solo se ha nucleo/conucleo 0; immagine e coimmagine di un morfismo in una categoria preabeliana. Categorie abeliane; in una categoria abeliana ogni mono/epi coincide con la propria immagine/coimmagine;  $A\text{-Mod}$  è abeliana; se  $A$  è abeliana, lo sono anche  $A^{\text{op}}$  e ogni sottocategoria piena di  $A$  chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei;  $\text{Fun}(C, A)$  è abeliana se  $A$  lo è; se inoltre  $C$  è preadditiva, anche  $\text{AddFun}(C, A)$  è abeliana. In una categoria abeliana un morfismo è un isomorfismo se e solo se è un mono e un epi. Per ogni morfismo  $f$  in una categoria preabeliana  $A$  c'è un morfismo naturale  $\text{Coim}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ ; tale morfismo è un isomorfismo per ogni  $f$  in  $A$  se e solo se  $A$  è abeliana. Ogni morfismo in una categoria abeliana è in modo essenzialmente unico composizione di un epi e di un mono.

Complessi in una categoria preadditiva e successioni esatte in una categoria abeliana; successioni esatte corte e loro spezzamento; ogni funtore additivo tra categorie abeliane preserva le successioni esatte corte che si spezzano; categorie abeliane semisemplici (cioè in cui tutte le successioni esatte corte si spezzano);  $A\text{-Mod}$  è semisemplice se e solo se  $A$  lo è. Funtori esatti a sinistra e/o a destra tra categorie abeliane; condizioni equivalenti all'esattezza a sinistra e/o a destra; funtori esatti al centro. Per ogni oggetto  $X$  di una categoria abeliana  $A$  i funtori  $A(X, -): A \rightarrow \text{Ab}$  e  $A(-, X): A^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$  sono esatti a sinistra. Una successione è esatta se lo è la sua immagine attraverso un funtore esatto e fedele; teorema di Freyd-Mitchell (solo enunciato); lemma del serpente in una categoria abeliana.

$(A, B)$ -bimoduli; gli  $(A, B)$ -bimoduli possono essere identificati con i  $(B^{\text{op}}, A^{\text{op}})$ -bimoduli;  $A$  è un  $(A, A)$ -bimodulo (o  $A$ -bimodulo); se  $A$  è commutativo e  $B$  è una  $A$ -algebra, allora ogni  $B$ -modulo sinistro/destro è un  $(B, A)/(A, B)$ -bimodulo (in particolare ogni  $A$ -modulo è un  $A$ -bimodulo). Se  $M$  è un  $(A, B)$ -bimodulo e  $N$  un  $(A, C)$ -bimodulo, allora  $\text{Hom}_A(M, N)$  è un  $(B, C)$ -bimodulo; se  $A$  è commutativo,  $B$  è una  $A$ -algebra e  $M$  e  $N$  sono  $B$ -moduli, allora  $\text{Hom}_B(M, N)$  è un  $A$ -(bi)modulo (in particolare  $\text{Hom}_A(M, N)$  è un  $A$ -modulo se  $M$  e  $N$  sono  $A$ -moduli). Un  $(A, B)$ -bimodulo  $M$  induce funtori  $\text{Hom}_A(M, -): A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  e  $\text{Hom}_A(-, M): (A\text{-Mod})^{\text{op}} \rightarrow B\text{-Mod}$ ; il funtore  $\text{Hom}_A(A, -): A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$  è isomorfo a  $\text{id}_{A\text{-Mod}}$ .

Prodotto tensoriale  $M \otimes_A N$  di  $M \in B\text{-Mod}$  e  $N \in A\text{-Mod}$  (definito attraverso una proprietà universale di funzioni  $A$ -bilanciate da  $M \times N$  a un gruppo abeliano); esistenza e unicità a meno di unico isomorfismo del prodotto tensoriale;  $M \otimes_A N \cong N \otimes_{A^{\text{op}}} M$ ; funtorialità del prodotto tensoriale in entrambi gli argomenti. Se  $M$  è un  $(B, A)$ -bimodulo e  $N$  un  $(A, C)$ -bimodulo, allora  $M \otimes_A N$  è un  $(B, C)$ -bimodulo; associatività a meno di isomorfismo del prodotto tensoriale; se  $A$  è commutativo e  $M$  e  $N$  sono  $A$ -moduli, allora  $M \otimes_A N$  è un  $A$ -modulo e può essere equivalentemente definito attraverso una proprietà universale di funzioni  $A$ -bilineari da  $M \times N$  a un  $A$ -modulo. Un  $(B, A)$ -bimodulo  $M$  definisce un funtore  $M \otimes_A -: A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$ .

Funtori aggiunti; unità e counità di un'aggiunzione; un'equivalenza è aggiunto sinistro e destro di un suo quasi-inverso. Un funtore aggiunto di un funtore additivo tra categorie preaddittive è additivo; un funtore aggiunto sinistro/destro preserva i colimiti/limiti (in particolare è esatto a destra/sinistra se le categorie sono abeliane), quindi un'equivalenza preserva i limiti e i colimiti; una categoria equivalente a una categoria (pre)abeliana è (pre)abeliana.

Se  $M$  è un  $(B, A)$ -bimodulo, il funtore  $M \otimes_A -: A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  è aggiunto sinistro di  $\text{Hom}_B(M, -): B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ ; il prodotto tensoriale è esatto a destra e preserva le somme dirette in entrambi gli argomenti; il funtore  $A \otimes_A -: A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$  è isomorfo a  $\text{id}_{A\text{-Mod}}$ . Un omomorfismo di anelli  $f: A \rightarrow B$  induce un funtore  $f^*: B\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$  (restrizione degli scalari), che ha aggiunto sinistro  $f_! := B \otimes_A -$  (estensione degli scalari, vedendo  $B$  come  $(B, A)$ -bimodulo) e aggiunto destro  $f_* := \text{Hom}_A(B, -)$  (coestensione degli scalari, vedendo  $B$  come  $(A, B)$ -bimodulo); se  $I$  è un ideale di  $A$  e  $\pi: A \rightarrow A/I$  è la proiezione al quoziente, c'è un isomorfismo naturale  $\pi_!(M) \cong M/IM$  per ogni  $A$ -modulo  $M$ .

Oggetti proiettivi e oggetti iniettivi in una categoria abeliana; tutti gli oggetti sono proiettivi se e solo se tutti gli oggetti sono iniettivi se e solo se la categoria è semisemplice. Un coprodotto/prodotto è proiettivo/iniettivo se e solo se lo è ogni termine. I moduli proiettivi sono gli addendi diretti dei moduli liberi. Moduli piatti; una somma diretta di moduli è piatta se e solo se lo è ogni termine; ogni mo-

dulo proiettivo è piatto. Un  $A$ -modulo  $M$  è iniettivo se e solo se ogni omomorfismo  $I \rightarrow M$  (con  $I$  ideale sinistro di  $A$ ) può essere esteso a un omomorfismo  $A \rightarrow M$ . Su un dominio d'integrità un modulo iniettivo è divisibile e il viceversa vale su un dominio a ideali principali. Categorie abeliane con abbastanza proiettivi/iniettivi;  $A\text{-Mod}$  ha abbastanza proiettivi e abbastanza iniettivi. Un  $A$ -modulo destro  $M$  è piatto se e solo se l' $A$ -modulo sinistro  $\text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  è iniettivo; su un dominio d'integrità un modulo piatto è senza torsione, e il viceversa vale su un dominio a ideali principali. Su un dominio a ideali principali un sottomodulo di un modulo libero è libero (solo enunciato), quindi un modulo è proiettivo se e solo se è libero.

Categoria  $C(A)$  dei complessi (coomologici) di una categoria preadditiva  $A$ ; se  $A$  è (pre)additiva o (pre)abeliana, anche  $C(A)$  lo è. Omotopia tra morfismi in  $C(A)$ ; i morfismi omotopi a 0 formano un ideale in  $C(A)$ , e il corrispondente quoziente costituisce la categoria omotopa  $K(A)$ ; se  $A$  è additiva, anche  $K(A)$  lo è (ma in generale  $K(A)$  non è preabeliana se  $A$  è abeliana). Se  $A$  è abeliana, ci sono funtori additivi (di coomologia)  $H^i: C(A) \rightarrow A$  e  $H^i: K(A) \rightarrow A$  per ogni intero  $i$ ; successione esatta lunga di coomologia indotta da una successione esatta corta in  $C(A)$ . Un funtore additivo tra categorie preaddittive  $F: A \rightarrow B$  induce funtori additivi  $F: C(A) \rightarrow C(B)$  e  $F: K(A) \rightarrow K(B)$ .

Risoluzioni sinistre (in particolare proiettive) e risoluzioni destre (in particolare iniettive) di un oggetto in una categoria abeliana; ogni oggetto ha risoluzioni proiettive/iniettive se la categoria ha abbastanza proiettivi/iniettivi. Se  $A$  è abeliana con abbastanza iniettivi, la scelta di una risoluzione iniettiva di ogni oggetto di  $A$  si estende in modo unico a un funtore additivo  $I: A \rightarrow K(A)$ , e scelte diverse inducono funtori isomorfi. Se  $B$  è un'altra categoria abeliana, l' $i$ -esimo funtore derivato destro di un funtore additivo  $F: A \rightarrow B$  è il funtore additivo  $R^iF: A \rightarrow B$  (ben definito a meno di isomorfismo) ottenuto come composizione  $A \xrightarrow{I} K(A) \xrightarrow{F} K(B) \xrightarrow{H^i} B$ . Successione esatta lunga dei funtori derivati indotta da una successione esatta corta in  $A$ ; naturalità dei morfismi  $R^i \rightarrow R^{i+1}$  nella successione esatta lunga rispetto al funtore e alle successioni esatte corte (solo enunciato);  $F$  è esatto a sinistra se e solo se  $R^0F \cong F$ ;  $F$  è esatto se e solo se  $R^0F \cong F$  e  $R^iF \cong 0$  per  $i > 0$  (basta  $i = 1$ ). Funtori derivati sinistri (se  $A$  ha abbastanza proiettivi)  $L_iF := (R^iF^{\text{op}})^{\text{op}}$ .

$\text{Ext}_A^i(-, =): A^{\text{op}} \times A \rightarrow \mathbf{Ab}$  come funtori derivati destri di  $\text{Hom}_A(-, =)$  calcolati nel primo (se  $A$  ha abbastanza proiettivi) o nel secondo (se  $A$  ha abbastanza iniettivi) argomento; in entrambi i casi una successione esatta corta in ciascun argomento induce una successione esatta lunga degli  $\text{Ext}_A^i$ ; equivalenza delle due definizioni quando  $A$  ha sia abbastanza iniettivi che abbastanza proiettivi.  $\text{Tor}_i^A(-, =): \mathbf{Mod}\text{-}A \times A\text{-}\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$  come funtori derivati sinistri di  $-\otimes_A =$  calcolati equivalentemente nel primo o nel secondo argomento. Calcolo di  $\text{Ext}_A^i$  e  $\text{Tor}_i^A$  quando  $A$  è un dominio a ideali principali.

Cenni su: dimensione iniettiva/proiettiva di un oggetto in una categoria abelia-

na con abbastanza iniettivi/proiettivi e dimensione globale della categoria; identificazione di  $\text{Ext}_A^i(X, Y)$  con classi di equivalenza di successioni esatte della forma  $0 \rightarrow Y \rightarrow Z_1 \rightarrow \cdots \rightarrow Z_i \rightarrow X \rightarrow 0$ ; definizione dei funtori derivati destri/sinistri di un funtore additivo  $F: A \rightarrow B$  tra categorie abeliane con ipotesi su  $A$  più deboli di avere abbastanza iniettivi/proiettivi.

Categoria  $\text{PSh}(X, C)$  dei prefasci su uno spazio topologico  $X$  a valori in una categoria  $C$ ; prefasci separati e fasci quando  $C$  è concreta; sottocategoria piena  $\text{Sh}(X, C)$  di  $\text{PSh}(X, C)$  con oggetti i fasci; fasci dati da funzioni verso un oggetto di  $C$ ; fascio (localmente) costante  $S_X \in \text{Sh}(X, C)$  di valore  $S \in C$ . Spazi anellati; categoria abeliana  $\mathcal{O}_X\text{-PMod}$  dei prefasci di moduli su uno spazio anellato  $(X, \mathcal{O}_X)$  e sua sottocategoria piena  $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$  dei fasci di moduli;  $\mathcal{O}_X\text{-Mod} \cong \mathcal{O}_X(X)\text{-Mod}$  se  $X \neq \emptyset$  ha la topologia banale;  $A_X\text{-Mod} \cong \text{Sh}(X, A\text{-Mod})$  per ogni anello  $A$ .

Morfismi iniettivi, localmente iniettivi, suriettivi e localmente suriettivi di prefasci; un morfismo iniettivo/suriiettivo lo è anche localmente; un morfismo localmente iniettivo da un prefascio separato è iniettivo; in generale un morfismo localmente suriettivo di fasci non è suriettivo. Per ogni prefascio  $\mathcal{F}$  esiste unico a meno di isomorfismo un morfismo localmente biunivoco  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^a$  con  $\mathcal{F}^a$  fascio (detto associato a  $\mathcal{F}$ ), e da questo si ottiene un funtore “fascio associato”  $\text{PSh}(X, C) \rightarrow \text{Sh}(X, C)$  (rispettivamente  $\mathcal{O}_X\text{-PMod} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ ) aggiunto sinistro dell’inclusione  $\text{Sh}(X, C) \rightarrow \text{PSh}(X, C)$  (rispettivamente  $\mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{-PMod}$ ). Per ogni spazio anellato  $(X, \mathcal{O}_X)$  la categoria  $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$  è abeliana con nuclei quelli di  $\mathcal{O}_X\text{-PMod}$ , conuclei ottenuti da quelli di  $\mathcal{O}_X\text{-PMod}$  prendendo il fascio associato, mono i morfismi (localmente) iniettivi e epi i morfismi localmente suriettivi.

Prodotti e coprodotti di fasci. Insiemi filtranti e colimiti filtranti; calcolo dei colimiti filtranti in categorie concrete. Spiga di un prefascio in un punto; un morfismo di prefasci è localmente iniettivo se e solo se è iniettivo sulle spighe.  $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$  ha abbastanza iniettivi per ogni spazio anellato  $(X, \mathcal{O}_X)$ . Il funtore  $\Gamma(X, -): \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X(X)\text{-Mod}$  che manda un fascio  $\mathcal{F}$  nelle sezioni globali  $\mathcal{F}(X)$  è esatto a sinistra (ma in generale non a destra); coomologia dei fasci  $H^i(X, -) := R^i\Gamma(X, -)$ .

Cenni su: relazioni tra la coomologia dei fasci e altre teorie coomologiche; funtori  $\mathcal{H}om_X(-, =): \mathcal{O}_X\text{-Mod}^{\text{op}} \times \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}_X\text{-Mod}$  (esatto a sinistra in entrambi gli argomenti) e  $-\otimes_X =: \mathcal{O}_X\text{-Mod} \times \mathcal{O}_X\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}_X\text{-Mod}$  (esatto a destra in entrambi gli argomenti) e loro funtori derivati; fasci di tipo finito, fasci di presentazione finita e fasci coerenti.