Corso di Algebra 1 - a.a. 2021-2022

Prova scritta del 27/09/2022

1. Dato un sottogruppo H di un gruppo finito G, sia s il numero di sottogruppi di G isomorfi a H.
   (a) Dimostrare che, se G è ciclico, allora $s = 1$.
   (b) Dimostrare che, se $s = 1$, allora H è normale in G.
   (c) Determinare s quando $G = S_4$ e $H = \langle(1, 2)\rangle$.
   (d) Trovare H normale in $G = S_4$ tale che $s > 1$.

2. Sia A un anello commutativo.
   (a) Dimostrare che esistono un campo K e un omomorfismo iniettivo di anelli $A \to K$ se e solo se A è un dominio.
   (b) Dimostrare che esistono un campo K e un omomorfismo suriettivo di anelli $A \to K$ se e solo se $A \neq \{0\}$.

   Si supponga ora $A = \mathbb{Q}[X]/(p)$ con $0 \neq p \in \mathbb{Q}[X]$.

   (c) Dimostrare che, se p ha una radice razionale, allora esiste un omomorfismo suriettivo di anelli $A \to \mathbb{Q}$.
   (d) Dimostrare che, se p è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$, allora esiste un omomorfismo iniettivo di anelli $A \to \mathbb{C}$.

Soluzioni

1. (a) Siano $n := \#G$ e $m := \#H$ (con m divisore di n per il teorema di Lagrange). Poiché un gruppo ciclico di ordine n contiene un unico sottogruppo di ordine d per ogni divisore positivo d di n, si conclude che H è l'unico sottogruppo di ordine m di G, e dunque $s = 1$ (ovviamente $\#H' = m$ per ogni sottogruppo H' di G isomorfo a H).

   (b) Per ogni $a \in G$ il coniugato aHa^{-1} è un sottogruppo di G isomorfo a H (è infatti l'immagine di H attraverso l'automorfismo interno γ_a di G definito da $\gamma_a(g) := aga^{-1}$). Essendo $s = 1$, si ha allora $aHa^{-1} = H$, cioè H è normale in G.

   (c) Si ha $H \cong C_2$, dato che $\#H = \mathrm{ord}((1, 2)) = 2$. È chiaro allora che s coincide con il numero di sottogruppi di G di ordine 2. D'altra parte i sottogruppi di G di ordine 2 sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di G di ordine 2: tale corrispondenza si ottiene associando a un sottogruppo di ordine 2 l'unico elemento non banale del sottogruppo. Se ne deduce che s è il numero di elementi di S_4 di ordine 2. Poiché gli elementi di S_4 di ordine 2 sono precisamente le trasposizioni (il cui numero è 6) e le coppie di trasposizioni disgiunte (il cui numero è 3), si ottiene $s = 6+3 = 9$.

   (d) Si può (e si deve) prendere
   $$H = V_4 := \{1, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}.$$
   Infatti è noto che V_4 è normale in S_4, mentre $s > 1$ perché $V_4 \cong C_2 \times C_2$ ed esistono altri sottogruppi H' di S_4 tali che $H' \cong C_2 \times C_2$ (per esempio $H' = \{1, (1, 2), (3, 4), (1, 2)(3, 4)\}$).

2. (a) Se A è un dominio, allora esiste un omomorfismo iniettivo di anelli $A \to K$ con K campo dei quozienti di A. Viceversa, se $f\colon A \to K$ è un omomorfismo iniettivo di anelli con K campo, allora A è un dominio perché $A \cong \mathrm{im}(f)$ e $\mathrm{im}(f)$ è un dominio, essendo un sottoanello del dominio K.

   (b) Se $A \neq \{0\}$, allora esiste un ideale massimale $I \subset A$ e la proiezione al quoziente $A \to K := A/I$ è un omomorfismo suriettivo di anelli (K è un campo perché quoziente di un anello commutativo per un ideale massimale). Viceversa, se $f\colon A \to K$ è un omomorfismo suriettivo di anelli con K campo, allora $1_A \neq 0_A$ (quindi $A \neq \{0_A\}$) perché $f(1_A) = 1_K \neq 0_K = f(0_A)$.

(c) Se p ha una radice $\alpha \in \mathbb{Q}$, allora l'omomorfismo (di anelli) di valutazione in α

$$\begin{aligned} \psi_\alpha \colon \mathbb{Q}[X] &\to \mathbb{Q} \\ q &\mapsto q(\alpha) \end{aligned}$$

è tale che $\psi_\alpha(p) = p(\alpha) = 0$. Dunque $p \in \ker(\psi_\alpha)$, e pertanto $(p) \subseteq \ker(\psi_\alpha)$. Essendo inoltre ψ_α suriettivo (infatti $\beta = \psi_\alpha(\beta)$ per ogni $\beta \in \mathbb{Q}$), per il teorema di omomorfismo ψ_α induce un omomorfismo suriettivo di anelli $A = \mathbb{Q}[X]/(p) \to \mathbb{Q}$.

(d) Se p è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$, in particolare $\deg(p) > 0$, quindi esiste una radice α di p nel campo algebricamente chiuso $\mathbb{C}$. Allora, analogamente al punto precedente, l'omomorfismo (di anelli) di valutazione in α

$$\begin{aligned} \psi_\alpha \colon \mathbb{Q}[X] &\to \mathbb{C} \\ q &\mapsto q(\alpha) \end{aligned}$$

è tale che $(p) \subseteq \ker(\psi_\alpha)$. Poiché $\ker(\psi_\alpha) \subsetneq \mathbb{Q}[X]$ (dato che $\psi_\alpha(1) = 1 \neq 0$) e (p) è un ideale massimale di $\mathbb{Q}[X]$ (perché p è irriducibile e $\mathbb{Q}[X]$ è un dominio a ideali principapli), deve essere $(p) = \ker(\psi_\alpha)$. Per il teorema di omomorfismo ψ_α induce allora un omomorfismo iniettivo di anelli $A = \mathbb{Q}[X]/\ker(\psi_\alpha) \to \mathbb{C}$.