Programma di Algebra Superiore
A. A. 2019/2020
Docente: Alberto Canonaco

Richiami di teoria degli anelli (con unità, non necessariamente commutativi). Esempi di anelli non commutativi: quaternioni $\mathbb{H}$ (con divisione); matrici $M_n(A)$; endomorfismi di un gruppo abeliano $\mathrm{End}(G)$. Per ogni anello A esiste un omomorfismo iniettivo naturale $A \to \mathrm{End}(A)$. Anello opposto A^{op} di un anello A; gli ideali destri di A sono gli ideali sinistri di A^{op}. Un anello non nullo in cui ogni elemento non nullo è invertibile a sinistra è un anello con divisione. Ogni anello non nullo ha ideali sinistri, destri e bilateri massimali.

Moduli (sinistri) su un anello; se K è un campo, un K-modulo è un K-spazio vettoriale. Dare una struttura di A-modulo su un gruppo abeliano M equivale a dare un omomorfismo di anelli $A \to \mathrm{End}(M)$; ogni gruppo abeliano ha un'unica struttura di $\mathbb{Z}$-modulo. $\{0\}$ e A sono A-moduli per ogni anello A. Moduli destri su un anello; gli A-moduli destri possono essere identificati con gli A^{op}-moduli sinistri.

Sottomoduli; i K-sottomoduli sono i K-sottospazi vettoriali, gli $\mathbb{Z}$-sottomoduli sono i sottogruppi. Gli A-sottomoduli di A sono gli ideali sinistri di A. Moduli semplici; A è un A-modulo semplice se e solo se A è un anello con divisione. L'intersezione di sottomoduli, la somma di sottomoduli e il prodotto di un ideale sinistro per un sottomodulo sono sottomoduli; divisione di un sottomodulo per un sottoinsieme (in particolare un sottomodulo) e annullatore di un sottoinsieme (in particolare di un sottomodulo). Sottomodulo generato da un sottoinsieme e insiemi di generatori di un modulo; moduli finitamente generati e moduli ciclici.

Omomorfismi e isomorfismi di moduli; gli omomorfismi di K-moduli sono le applicazioni K-lineari, gli omomorfismi di $\mathbb{Z}$-moduli sono gli omomorfismi di gruppi. Omomorfismi di A-moduli da A verso un A-modulo qualunque. Immagine e controimmagine di sottomoduli attraverso un omomorfismo di moduli sono sottomoduli (in particolare, nucleo e immagine di un omomorfismo di moduli sono sottomoduli); l'immagine del sottomodulo generato da un sottoinsieme è generata dall'immagine del sottoinsieme. Lemma di Schur.

Quoziente M/N di un modulo M per un sottomodulo N; la proiezione naturale $M \to M/N$ è un omomorfismo suriettivo di moduli con nucleo N; i sottomoduli di M/N sono tutti e soli della forma P/N con P sottomodulo di M contenente N. Teoremi di omomorfismo e di isomorfismo per moduli. Un A-modulo è ciclico (rispettivamente semplice) se e solo se è isomorfo a A/I per qualche ideale sinistro (rispettivamente ideale sinistro massimale) I di A; se inoltre A è commutativo e I e J sono due ideali di A, allora gli A-moduli A/I e A/J sono isomorfi se e solo se $I = J$. Conucleo di un omomorfismo di moduli; il conucleo è nullo se e solo se l'omomorfismo è suriettivo.

Prodotto e somma diretta (o coprodotto) di moduli e loro proprietà universali; somma diretta di sottomoduli. Insiemi linearmente indipendenti e basi di un modulo su un anello non nullo; moduli liberi. Omomorfismi da un modulo libero verso un modulo qualunque. Un A-modulo è libero se e solo se è isomorfo a una somma diretta di copie di A. Ogni modulo è isomorfo a un quoziente di un modulo libero; un A-modulo è finitamente generato se e solo se è isomorfo a un quoziente di A^n per qualche n. Tutti gli A-moduli sono liberi se e solo se A è un anello con divisione. Due somme dirette di copie di un modulo semplice sono isomorfe se e solo se sono indicizzate da insiemi della stessa cardinalità. Tutte le basi di un A-modulo libero hanno la stessa cardinalità (detta rango del modulo) se A è un anello con divisione.

Restrizione degli scalari attraverso un omomorfismo di anelli. Se $I \subseteq A$ è un ideale, dare un A/I-modulo equivale a dare un A-modulo il cui annullatore contenga I; estensione degli scalari attraverso la proiezione al quoziente $A \to A/I$. Il rango di ogni A-modulo libero è ben definito se lo è il rango di ogni A/I-modulo libero; il rango di ogni A-modulo libero è ben definito se A è commutativo e non nullo. A-algebre (con A anello commutativo) e omomorfismi di A-algebre; ogni anello ha un'unica struttura di $\mathbb{Z}$-algebra e gli omomorfismi di $\mathbb{Z}$-algebre sono gli omomorfismi di anelli.

Addendi diretti di un modulo; condizioni equivalenti perché un sottomodulo sia un addendo diretto; se $M' \subseteq M$ è un sottomodulo tale che M/M' è libero, allora M' è un addendo diretto di M. Moduli semisemplici; sottomoduli e quozienti di un modulo semisemplice sono semisemplici. Un modulo è semisemplice se e solo se è somma (diretta) di sottomoduli semplici; ogni modulo semisemplice è in modo essenzialmente unico una somma diretta di moduli semplici. Anelli semisemplici (a sinistra); A è semisemplice se e solo se tutti gli A-moduli sono semisemplici. Teorema di Wedderburn-Artin (solo enunciato): un anello è semisemplice se e solo se è isomorfo a un prodotto finito di anelli di matrici a coefficienti in anelli con divisione; inoltre tale scrittura come prodotto è essenzialmente unica. Conseguenze: un anello è semisemplice a sinistra se e solo se lo è a destra; un anello commutativo è semisemplice se e solo se è isomorfo a un prodotto finito di campi.

Moduli noetheriani e moduli artiniani; dato un sottomodulo M' di un modulo M, M è noetheriano (rispettivamente artiniano) se e solo se M' e M/M' lo sono. Serie di composizione di un modulo; un modulo ha una serie di composizione se e solo se è noetheriano e artiniano. Teorema di Jordan-Hölder (solo enunciato): la lunghezza e i fattori di composizione (a meno dell'ordine e di isomorfismo) di una serie di composizione di un modulo noetheriano e artiniano non dipendono dalla serie. Un modulo è noetheriano se e solo se ogni suo sottomodulo è finitamente generato. Anelli noetheriani (rispettivamente artiniani) a sinistra e/o a destra. Se A è noetheriano a sinistra, un A-modulo è noetheriano se e solo se è finitamente generato. Se A è artiniano a sinistra, è anche noetheriano a sinistra e un A-

modulo è artiniano se e solo se è noetheriano se e solo se è finitamente generato (solo enunciato). Teorema della base di Hilbert (solo enunciato): se A è commutivo noetheriano, anche $A[X]$ lo è.

Moduli indecomponibili; ogni modulo noetheriano o artiniano è somma diretta finita di moduli indecomponibili. Teorema di Krull-Schmidt (solo enunciato): la decomposizione di un modulo noetheriano e artiniano come somma diretta finita di moduli indecomponibili è essenzialmente unica. Teorema di struttura per moduli finitamente generati su un dominio a ideali principali (solo enunciato).

Complessi e successioni esatte (in particolare corte) di moduli; spezzamento di successioni esatte corte; tutte le successioni esatte corte di A-moduli si spezzano se e solo se A è semisemplice.

(A, B)-bimoduli; gli (A, B)-bimoduli possono essere identificati con i $(B^{\text{op}}, A^{\text{op}})$-bimoduli; A è un (A, A)-bimodulo (o A-bimodulo); se A è commutativo, ogni A-modulo è un A-bimodulo. Gli omomorfismi tra due A-moduli M e N formano un gruppo abeliano $\text{Hom}_A(M, N)$, che è anche un (B, C)-bimodulo se M è un (A, B)-bimodulo e N un (A, C)-bimodulo. In particolare, $\text{Hom}_A(A, M)$ è un A-modulo isomorfo a M e, se A è commutativo, $\text{Hom}_A(M, N)$ è un A-(bi)modulo. Se B è una A-algebra e M un B-modulo, $\text{End}_B(M)$ è una A-algebra.

Categorie e categorie piccole (in cui gli oggetti formano un insieme); categorie concrete, come Set degli insiemi, Top degli spazi topologici, Grp dei gruppi, Rng degli anelli, A-Mod (con A anello) degli A-moduli sinistri, Mod-A degli A-moduli destri e A-Alg delle A-algebre (con A anello commutativo); preordini come categorie con al più un morfismo tra due oggetti; monoidi come categorie con un solo oggetto. Morfismi invertibili a sinistra o a destra e isomorfismi; un morfismo è un isomorfismo se e solo se è invertibile a sinistra e a destra. Sottocategorie e sottocategorie piene; Ab sottocategoria piena di Grp costituita dai gruppi abeliani e CRng sottocategoria piena di Rng costituita dagli anelli commutativi. Prodotto di due categorie; categoria opposta C^{op} di una categoria C.

Funtori (covarianti) tra categorie; ogni funtore preserva i morfismi invertibili a sinistra o a destra e gli isomorfismi. Funtori controvarianti $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ come funtori (covarianti) $\mathsf{C}^{\text{op}} \to \mathsf{D}$; funtore opposto $\mathrm{F}^{\text{op}} \colon \mathsf{C}^{\text{op}} \to \mathsf{D}^{\text{op}}$ di un funtore $\mathrm{F} \colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$. Funtori dimenticanti tra categorie concrete; i funtori tra due monoidi sono gli omomorfismi di monoidi; per ogni oggetto X di una categoria C ci sono funtori $\mathsf{C}(X, -) = \text{Hom}_{\mathsf{C}}(X, -) \colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ e $\mathsf{C}(-, X) = \text{Hom}_{\mathsf{C}}(-, X) \colon \mathsf{C}^{\text{op}} \to \mathsf{Set}$. Funtore identità di una categoria e composizione di funtori; categoria Cat delle categorie piccole. Funtori fedeli, pieni e pienamente fedeli; isomorfismi di categorie; un funtore è un isomorfismo se e solo se è biunivoco sugli oggetti e pienamente fedele; ci sono isomorfismi di categorie Mod-$A \cong A^{\text{op}}$-Mod, $\mathbb{Z}$-$\mathsf{Mod} \cong \mathsf{Ab}$, $\mathbb{Z}$-$\mathsf{Alg} \cong \mathsf{Rng}$.

Trasformazioni naturali tra funtori. Identità di un funtore e composizione di trasformazioni naturali; categoria $\mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ dei funtori tra due categorie C e D con C piccola; isomorfismi di funtori. Funtori essenzialmente iniettivi e essenzialmente suriettivi; un funtore pienamente fedele è essenzialmente iniettivo. Equivalenze di categorie; un funtore è un'equivalenza se e solo se è pienamente fedele e essenzialmente suriettivo.

Categorie preadditive; A-Mod è preadditiva; se A è preadditiva, lo sono anche A^{op} e ogni sottocategoria piena di A; anelli come categorie preadditive con un solo oggetto. Funtori additivi tra categorie preadditive; sono funtori additivi gli omomorfismi di anelli, la restrizione degli scalari B-$\mathsf{Mod} \to A$-Mod per ogni omomorfismo di anelli $A \to B$, $\mathsf{A}(X,-)\colon \mathsf{A} \to \mathsf{Ab}$ e $\mathsf{A}(-,X)\colon \mathsf{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ per ogni oggetto X di una categoria preadditiva A.

Prodotti e coprodotti in una categoria; loro unicità a meno di isomorfismo; preservazione di (co)prodotti da parte di un funtore. Oggetti terminali, iniziali e nulli; in una categoria preadditiva un oggetto è nullo se e solo se è terminale se e solo se è iniziale. Biprodotti in una categoria preadditiva; un oggetto è un biprodotto di due oggetti se e solo se ne è un prodotto se e solo se ne è un coprodotto; un funtore additivo tra categorie preadditive $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ preserva oggetti nulli e biprodotti, e dunque i (co)prodotti finiti che esistono in A. Categorie additive; A-Mod è additiva; se A è additiva, lo sono anche A^{op} e ogni sottocategoria piena di A chiusa per (co)prodotti finiti.

Limiti e colimiti in una categoria; (co)prodotti come casi particolari di (co)limiti; preservazione di (co)limiti da parte di un funtore. Equalizzatori e coequalizzatori; una categoria C ha tutti i (co)limiti (finiti) se ha tutti i (co)prodotti (finiti) e tutti i (co)equalizzatori, e in questo caso un funtore $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ preserva tutti i (co)limiti (finiti) se preserva tutti i (co)prodotti (finiti) e tutti i (co)equalizzatori (solo enunciato). Nucleo e conucleo di un morfismo in una categoria preadditiva; ogni (co)equalizzatore è un (co)nucleo in una categoria preadditiva. Categorie preabeliane (definite come categorie additive in cui ogni morfismo ha nucleo e conucleo); una categoria preabeliana ha tutti i limiti e i colimiti finiti; A-Mod è preabeliana; se A è preabeliana, lo sono anche A^{op} e ogni sottocategoria piena di A chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei.

Monomorfismi e epimorfismi in una categoria. In una categoria preadditiva ogni nucleo/conucleo è un monomorfismo/epimorfismo; in una categoria additiva un morfismo è un monomorfismo/epimorfismo se e solo ha nucleo/conucleo 0. Categorie abeliane (definite come categorie preabeliane in cui ogni monomorfismo è un nucleo e ogni epimorfismo è un conucleo); in una categoria abeliana ogni monomorfismo/epimorfismo è nucleo/conucleo del suo conucleo/nucleo; A-Mod è abeliana; se A è abeliana, lo sono anche A^{op} e ogni sottocategoria piena di A chiusa per (co)prodotti finiti, nuclei e conuclei. Se C è una categoria piccola e A è (pre)additiva/(pre)abeliana, anche $\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{A})$ è (pre)additiva/(pre)abeliana; se inoltre C è preadditiva, anche la sottocategoria piena $\mathsf{AddFun}(\mathsf{C},\mathsf{A})$ di $\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{A})$ con oggetti i funtori additivi è (pre)additiva/(pre)abeliana; A-$\mathsf{Mod} \cong \mathsf{AddFun}(A,\mathsf{Ab})$. In una categoria abeliana un morfismo è un isomorfismo se e solo se è un monomorfismo e un epimorfismo. Immagine e coimmagine di un morfismo in una categoria preabeliana; c'è un morfismo naturale tra coimmagine e immagine, che è un isomorfismo se la categoria è abeliana. Complessi in una categoria preadditiva e successioni esatte in una categoria abeliana; spezzamento di successioni esatte corte.

Funtori esatti a sinistra e/o a destra tra categorie abeliane; condizioni equivalenti all'esattezza a sinistra e/o a destra; funtori esatti al centro. Per ogni oggetto X di una categoria abeliana A i funtori $\mathsf{A}(X,-)\colon \mathsf{A} \to \mathsf{Ab}$ e $\mathsf{A}(-,X)\colon \mathsf{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ sono esatti a sinistra. Un funtore additivo tra categorie abeliane preserva le successioni esatte corte che si spezzano, dunque è esatto se nella categoria di partenza tutte le successioni esatte corte si spezzano. Teorema di Freyd-Mitchell (solo enunciato): per ogni categoria abeliana piccola A esiste un anello A e un funtore esatto e pienamente fedele $\mathsf{A} \to A\text{-}\mathsf{Mod}$. Conseguenza: per le dimostrazioni di "caccia al diagramma" in una categoria abeliana si può assumere di essere in una categoria di moduli; lemma del serpente e lemma dei cinque.

Funtori aggiunti; un'equivalenza è aggiunto sinistro e destro di un suo quasi-inverso. Un funtore aggiunto sinistro/destro preserva i colimiti/limiti (solo enunciato), e in particolare è esatto a destra/sinistra se le categorie sono abeliane.

Prodotto tensoriale $M \otimes_A N$ di un A-modulo destro M e di un A-modulo sinistro N (definito attraverso una proprietà universale di funzioni A-bilanciate da $M \times N$ a un gruppo abeliano); esistenza e unicità a meno di isomorfismo del prodotto tensoriale; $M \otimes_A N \cong N \otimes_{A^{\mathrm{op}}} M$. Se M è un (B,A)-bimodulo e N un (A,C)-bimodulo, $M \otimes_A N$ è un (B,C)-bimodulo; associatività a meno di isomorfismo del prodotto tensoriale; se A è commutativo e M e N sono A-moduli, $M \otimes_A N$ è un A-modulo e può essere equivalentemente definito attraverso una proprietà universale di funzioni A-bilineari da $M \times N$ a un A-modulo. Un (B,A)-bimodulo definisce un funtore $M \otimes_A -\colon A\text{-}\mathsf{Mod} \to B\text{-}\mathsf{Mod}$, che è aggiunto sinistro di $\mathrm{Hom}_B(M,-)$; il prodotto tensoriale è esatto a destra e preserva le somme dirette in entrambi gli argomenti. Il funtore di restrizione degli scalari $B\text{-}\mathsf{Mod} \to A\text{-}\mathsf{Mod}$ indotto da un omomorfismo di anelli $A \to B$ ha aggiunto sinistro $B \otimes_A -$ (estensione degli scalari, vedendo B come (B,A)-bimodulo) e aggiunto destro $\mathrm{Hom}_A(B,-)$ (vedendo B come (A,B)-bimodulo).

Oggetti proiettivi e oggetti iniettivi in una categoria abeliana; tutti gli oggetti sono proiettivi se e solo se tutti gli oggetti sono proiettivi se e solo se tutte le successioni esatte corte si spezzano. Un coprodotto/prodotto è proiettivo/iniettivo se e solo se ogni termine è proiettivo/iniettivo. I moduli proiettivi sono gli addendi diretti dei moduli liberi. Moduli piatti; una somma diretta di moduli è piatta se e solo se ogni termine è piatto; ogni modulo proiettivo è piatto. Su un dominio a ideali principali un sottomodulo di un modulo libero è libero, quindi un modulo è proiettivo se e solo se è libero. Su un dominio un modulo piatto è senza torsione, e il viceversa vale su un dominio a ideali principali. Un A-modulo M è iniettivo se e solo se ogni omomorfismo $I \to M$ (con I ideale sinistro di A) può essere esteso a un omomorfismo $A \to M$. Su un dominio un modulo iniettivo è divisibile e il viceversa vale su un dominio a ideali principali. Categorie abeliane con abbastanza proiettivi/iniettivi; se A ha abbastanza proiettivi/iniettivi, ogni oggetto di A ha risoluzioni proiettive/iniettive. A-Mod ha abbastanza proiettivi e abbastanza iniettivi.

Categoria $\mathrm{C}(\mathsf{A})$ dei complessi (coomologici) di una categoria preadditiva A; se A è (pre)additiva o (pre)abeliana, anche $\mathrm{C}(\mathsf{A})$ lo è. Se A è abeliana, ci sono funtori additivi (di coomologia) $\mathrm{H}^i\colon \mathrm{C}(\mathsf{A}) \to \mathsf{A}$ per ogni intero i; successione esatta lunga di coomologia indotta da una successione esatta corta in $\mathrm{C}(\mathsf{A})$. Omotopia tra morfismi di complessi e categoria omotopa $\mathrm{K}(\mathsf{A})$; se A è (pre)additiva, anche $\mathrm{K}(\mathsf{A})$ lo è (ma in generale $\mathrm{K}(\mathsf{A})$ non è preabeliana se A è abeliana); i funtori H^i inducono funtori additivi $\mathrm{H}^i\colon \mathrm{K}(\mathsf{A}) \to \mathsf{A}$. Se A è abeliana con abbastanza iniettivi, la scelta di una risoluzione iniettiva di ogni oggetto di A si estende in modo unico a un funtore additivo $\mathrm{I}\colon \mathsf{A} \to \mathrm{K}(\mathsf{A})$ (e scelte diverse inducono funtori isomorfi).

Un funtore additivo tra categorie preadditive $\mathrm{F}\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ induce funtori additivi $\mathrm{F}\colon \mathrm{C}(\mathsf{A}) \to \mathrm{C}(\mathsf{B})$ e $\mathrm{F}\colon \mathrm{K}(\mathsf{A}) \to \mathrm{K}(\mathsf{B})$. Se A e B sono abeliane e A ha abbastanza iniettivi, l'i-esimo funtore derivato destro $\mathrm{R}^i\mathrm{F}\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ di F è il funtore additivo (ben definito a meno di isomorfismo) ottenuto come composizione $\mathsf{A} \xrightarrow{\mathrm{I}} \mathrm{K}(\mathsf{A}) \xrightarrow{\mathrm{F}} \mathrm{K}(\mathsf{B}) \xrightarrow{\mathrm{H}^i} \mathsf{B}$. Successione esatta lunga dei funtori derivati indotta da una successione esatta corta in A; F è esatto a sinistra se e solo se $\mathrm{R}^0\mathrm{F} \cong \mathrm{F}$; F è esatto se e solo se $\mathrm{R}^0\mathrm{F} \cong \mathrm{F}$ e $\mathrm{R}^i\mathrm{F} \cong 0$ per $i > 0$ (basta $i = 1$). Funtori derivati sinistri (se A ha abbastanza proiettivi) $\mathrm{L}_i\mathrm{F} := (\mathrm{R}^i\mathrm{F}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$.

$\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}\colon \mathsf{A}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{A} \to \mathsf{Ab}$ come funtori derivati destri di $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}$ calcolati nel primo (se A ha abbastanza proiettivi) o nel secondo (se A ha abbastanza iniettivi) argomento; equivalenza delle due definizioni quando A ha sia abbastanza iniettivi che proiettivi. $\mathrm{Tor}^A_i\colon \mathsf{Mod}\text{-}A \times A\text{-}\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$ come funtori derivati sinistri di $\otimes_A$ calcolati equivalentemente nel primo o nel secondo argomento. Calcolo di Ext^i_A e Tor^A_i quando A è un dominio a ideali principali. Cenni sulla dimensione iniettiva/proiettiva di un oggetto in una categoria abeliana con abbastanza iniettivi/proiettivi e sulla dimensione globale della categoria. Identificazione di $\mathrm{Ext}^i_{\mathsf{A}}(X, Y)$ con le classi di isomorfismo di estensioni di X con Y per $i = 1$ e cenni al caso $i > 1$.

Categoria dei prefasci su uno spazio topologico a valori in una categoria (concreta); categoria abeliana dei prefasci di moduli su un prefascio di anelli. Fasci su uno spazio topologico; fascio associato a un prefascio, sua esistenza (solo enunciata) e unicità a meno di isomorfismo; categoria abeliana (con abbastanza iniettivi, solo enunciato) dei fasci di moduli su un fascio di anelli. Esattezza a sinistra delle sezioni globali; coomologia dei fasci come funtori derivati destri delle sezioni globali.