# Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 29-04-2020

# Esercizio sui $p$-gruppi

1. $\#G = p^3$, $G$ non abeliano $\implies Z(G) = [G, G] \cong C_p$ e $G/Z(G) \cong C_p^2$.
2. $\{1\} \neq H \lhd G$ $p$-gruppo $\implies H \cap Z(G) \neq \{1\}$.

# Esercizio sui $p$-gruppi

1. $\#G = p^3$, $G$ non abeliano $\implies Z(G) = [G,G] \cong C_p$ e $G/Z(G) \cong C_p^2$.
2. $\{1\} \neq H \lhd G$ $p$-gruppo $\implies H \cap Z(G) \neq \{1\}$.

1. $G \neq \{1\}$ $p$-gruppo $\implies Z(G) \neq \{1\} \implies [G : Z(G)] \neq p^3$.
   $G$ non abeliano $\implies G/Z(G)$ non ciclico $\implies$ $[G : Z(G)] \neq 1, p$.
   Dunque $[G : Z(G)] = p^2 \implies G/Z(G) \cong C_p^2$ abeliano $\implies$ $[G,G] < Z(G) \cong C_p$ semplice.
   $G$ non abeliano $\implies [G,G] \neq \{1\} \implies [G,G] = Z(G)$.
2. $H = \coprod_{i=1}^n [a_i]_G \implies \#H = \sum_{i=1}^n [G : C_G(a_i)]$.
   Posso supporre che $a_i \in Z(G)$ ($\iff [G : C_G(a_i)] = 1$) $\iff$ $i > m$ (per qualche $0 \leq m \leq n$), quindi
   $$\#H = \#(H \cap Z(G)) + \sum_{i=1}^m [G : C_G(a_i)].$$
   $p \mid \#H$ e $p \mid [G : C_G(a_i)]$ per $i \leq m \implies p \mid \#(H \cap Z(G))$.

# Esercizio sui gruppi di ordine $p^3$

$C_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con $p$ primo.

1. $f\colon C_p^2 \to C_p^2$, $(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto (\bar{a}, \bar{a} + \bar{b})$ è un isomorfismo.
2. $\exists\, \theta\colon C_p \to \mathrm{Aut}(C_p^2)$ omomorfismo tale che $\theta(\bar{1}) = f$.
3. $p > 2 \implies G := C_p^2 \rtimes_\theta C_p$ non abeliano tale che $\#G = p^3$ e $g^p = 1\ \forall\, g \in G$.
4. Esiste un gruppo non abeliano di ordine $p^3$ che contiene elementi di ordine $p^2$.

# Esercizio sui gruppi di ordine $p^3$

$C_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ con $p$ primo.

1. $f\colon C_p^2 \to C_p^2$, $(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto (\bar{a}, \bar{a} + \bar{b})$ è un isomorfismo.
2. $\exists\, \theta\colon C_p \to \mathrm{Aut}(C_p^2)$ omomorfismo tale che $\theta(\bar{1}) = f$.
3. $p > 2 \implies G := C_p^2 \rtimes_\theta C_p$ non abeliano tale che $\#G = p^3$ e $g^p = 1\ \forall\, g \in G$.
4. Esiste un gruppo non abeliano di ordine $p^3$ che contiene elementi di ordine $p^2$.

1. $f$ è un isomorfismo di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-spazi vettoriali (e dunque di gruppi) perché rappresentato da $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/pZ)$.
2. Basta dimostrare che $\mathrm{ord}(f) \mid p$, cioè che $f^p = \mathrm{id}_{C_p^2}$.
   Per induzione su $n$ $\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in C_p$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f^n(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, n\bar{a} + \bar{b})$ $(\implies f^p(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b}))$: vero per $n = 0$; $n > 0 \implies$
   $$f^n(\bar{a}, \bar{b}) = f(f^{n-1}(\bar{a}, \bar{b})) = f(\bar{a}, (n-1)\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a}, n\bar{a} + \bar{b}).$$

# Dimostrazione di 3 e 4

3. $\#G = (\#C_p^2)(\#C_p) = p^2 p = p^3$ e $G$ non abeliano perché $\theta$ non banale (dato che $f \neq \mathrm{id}_{C_p^2}$).
   $g := (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}), g' := (\overline{a'}, \overline{b'}, \overline{c'}) \in G \implies$
   $gg' = ((\bar{a}, \bar{b}) + \theta(\bar{c})(\overline{a'}, \overline{b'}), \bar{c} + \overline{c'}) = ((\bar{a}, \bar{b}) + f^c(\overline{a'}, \overline{b'}), \bar{c} + \overline{c'})$
   $= ((\bar{a}, \bar{b}) + (\overline{a'}, c\overline{a'} + \overline{b'}), \bar{c} + \overline{c'}) = (\bar{a} + \overline{a'}, c\overline{a'} + \bar{b} + \overline{b'}, \bar{c} + \overline{c'})$.

   Per induzione su $n$ $g^n = (n\bar{a}, cn(n-1)/2\bar{a} + n\bar{b}, n\bar{c})$ ($\implies g^p = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) = 1_G$ perché $p \mid p(p-1)/2$ per $p > 2$) $\forall\, n \in \mathbb{N}$: vero per $n = 0$; $n > 0 \implies g^n = gg^{n-1} =$
   $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})((n-1)\bar{a}, c(n-1)(n-2)/2\bar{a} + (n-1)\bar{b}, (n-1)\bar{c}) =$
   $(n\bar{a}, c(n-1)\bar{a} + c(n-1)(n-2)/2\bar{a} + n\bar{b}, n\bar{c}) =$
   $(n\bar{a}, cn(n-1)/2\bar{a} + n\bar{b}, n\bar{c})$.
4. $\exists\, \theta\colon C_p \to \mathrm{Aut}(C_{p^2})$ omomorfismo non banale (perché $p \mid \#\mathrm{Aut}(C_{p^2}) = \#\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}^* = p(p-1)) \implies G := C_{p^2} \rtimes_\theta C_p$ non abeliano tale che $\#G = (\#C_{p^2})(\#C_p) = p^2 p = p^3$.
   $G$ contiene elementi di ordine $p^2$ perché $\exists\, C_{p^2} \cong K \lhd G$.

# Esercizio sui normalizzatori

1. $K < H < G$ e $K \lhd G \implies N_{G/K}(H/K) = N_G(H)/K$.
2. $G$ $p$-gruppo, $H < G$ e $H \neq G \implies H \subsetneq N(H)$.
3. $H$ $p$-Sylow di $G \implies N(N(H)) = N(H)$.

# Esercizio sui normalizzatori

1. $K < H < G$ e $K \lhd G \implies N_{G/K}(H/K) = N_G(H)/K$.
2. $G$ $p$-gruppo, $H < G$ e $H \neq G \implies H \subsetneq N(H)$.
3. $H$ $p$-Sylow di $G \implies N(N(H)) = N(H)$.

1. Dato $g \in G$, va dimostrato che $g \in N_G(H) \iff \bar{g} \in N_{\overline{G}}(\overline{H})$ (dove $\bar{g} := gK \in \overline{G} := G/K$ e $\overline{H} := H/K$).
   $g \in N_G(H) \iff gHg^{-1} = H$. Poiché $K = gKg^{-1} \subseteq gHg^{-1}$, $H = gHg^{-1} \iff \overline{H} = \overline{gHg^{-1}} = \bar{g}\overline{H}\bar{g}^{-1} \iff \bar{g} \in N_{\overline{G}}(\overline{H})$.
2. $Z(G) \subseteq N(H) \implies$ posso supporre $Z(G) \subseteq H$.
   Per induzione su $\#G$: se $G \neq \{1\}$ anche $Z(G) \neq \{1\} \implies$ $\overline{G} := G/Z(G)$ $p$-gruppo, $\#\overline{G} < \#G$, $\overline{H} < \overline{G}$ e $\overline{H} \neq \overline{G} \implies$ per induzione $\overline{H} \subsetneq N_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{N_G(H)} \implies H \subsetneq N_G(H)$.
3. Basta dimostrare $N(N(H)) \subseteq N(H)$: $g \in N(N(H)) \implies$ $gN(H)g^{-1} = N(H) \implies f := \Gamma(g)|_{N(H)} \in \mathrm{Aut}(N(H))$.
   $H \lhd N(H)$, $H$ $p$-Sylow di $N(H) \implies H$ caratteristico in $N(H)$ $\implies H = f(H) = gHg^{-1} \implies g \in N(H)$.

# Esercizio sui sottogruppi caratteristici

1. $K < H < G$ con $K$ caratteristico in $H$ e $H$ normale (risp. caratteristico) in $G \implies K$ normale (risp. caratteristico) in $G$.
2. Fornire un esempio in cui $K < H < G$ e $K$ è caratteristico in $G$ ma non in $H$.
3. $G$ finito, $H \triangleleft G$ tale che $\mathrm{mcd}(\#H, [G : H]) = 1 \implies H$ caratteristico in $G$.

# Esercizio sui sottogruppi caratteristici

1. $K < H < G$ con $K$ caratteristico in $H$ e $H$ normale (risp. caratteristico) in $G \implies K$ normale (risp. caratteristico) in $G$.
2. Fornire un esempio in cui $K < H < G$ e $K$ è caratteristico in $G$ ma non in $H$.
3. $G$ finito, $H \lhd G$ tale che $\mathrm{mcd}(\#H, [G : H]) = 1 \implies$ $H$ caratteristico in $G$.

1. Va dimostrato che $f(K) = K \ \forall f \in \mathrm{Int}(G)$ (risp. $\mathrm{Aut}(G)$). Per ipotesi $f|_H \in \mathrm{Aut}(H) \implies f(K) = f|_H(K) = K$.
2. $G := D_4$, $H := \langle R^2, S\rangle$, $K := \langle R^2\rangle$.
   Infatti $K$ è caratteristico in $\langle R\rangle \cong C_4$ e $\langle R\rangle$ è caratteristico in $D_4$ (perché è l'unico sottogruppo isomorfo a $C_4$ di $D_4$) $\implies$ $K$ è caratteristico in $D_4$ per il punto precedente.
   $K \cong C_2$ non è caratteristico in $H = \{1, R^2, S, R^2S\} \cong C_2^2$.
3. $n := \#H$, $m := [G : H]$. $K < G$ tale che $\#K = n \implies$ $HK < G$ tale che $\#(HK) = n^2/n' \mid nm$ (con $n' := \#(H \cap K)$) $\implies n \mid mn' \implies n \mid n' \implies n = n' \implies K = H$.

# Esercizio

$\#G = 45p$ con $p$ primo.

1. $p = 3$ o $5 \implies s_p = 1$.
2. Fornire un esempio in cui $s_p > 1$.
3. $p = 11 \implies G$ non semplice.
4. Fornire un esempio in cui $p = 11$ e $G$ non abeliano.
5. $p = 23 \implies G$ abeliano.

# Esercizio

$\#G = 45p$ con $p$ primo.

1. $p = 3$ o $5 \implies s_p = 1$.
2. Fornire un esempio in cui $s_p > 1$.
3. $p = 11 \implies G$ non semplice.
4. Fornire un esempio in cui $p = 11$ e $G$ non abeliano.
5. $p = 23 \implies G$ abeliano.

1. $p = 3 \implies s_3 \mid 5,\ s_3 \equiv 1 \mod 3 \implies s_3 = 1$.
   $p = 5 \implies s_5 \mid 9,\ s_5 \equiv 1 \mod 5 \implies s_5 = 1$.
2. $p = 2,\ G = D_{45} \implies s_2 = 45$.
3. $s_{11} \mid 45,\ s_{11} \equiv 1 \mod 11 \implies s_{11} = 1$ o $45$.
   $s_5 \mid 99,\ s_5 \equiv 1 \mod 5 \implies s_5 = 1$ o $11$.
   Non può essere $s_{11} = 45$ e $s_5 = 11$, altrimenti $G$ conterrebbe $45 \cdot 10 = 450$ elementi di ordine 11 e $11 \cdot 4 = 44$ elementi di ordine 5, assurdo perché $\#G = 45 \cdot 11 = 495 = 450 + 44 + 1$, quindi $G$ non avrebbe nessun 3-Sylow.
   Allora $\exists H \triangleleft G$ con $H$ 11-Sylow o 5-Sylow.

# Dimostrazione di 4 e 5

4. $G = C_9 \times G'$ con $G' = C_{11} \rtimes C_5$ non abeliano (che esiste perché $11 \equiv 1 \mod 5$).
5. $s_{23} \mid 45$, $s_{23} \equiv 1 \mod 23 \implies s_{23} = 1$.
   $s_5 \mid 9 \cdot 23$, $s_5 \equiv 1 \mod 5 \implies s_5 = 1$.
   $H_q$ $q$-Sylow (per $q = 3, 5, 23$) $\implies H_{23}, H_5 \lhd G \implies$
   $K := H_{23}H_5 \lhd G \implies G = K \rtimes H_3$.
   $\#K = 23 \cdot 5 = 115$ e $23 \not\equiv 1 \mod 5 \implies K \cong C_{115} \implies$
   $G \cong C_{115} \rtimes_\theta H_3$ per qualche omomorfismo

   $\theta \colon H_3 \to \mathrm{Aut}(C_{115}) \cong \mathbb{Z}/115\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{Z}/23\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}^* \cong C_{22} \times C_4$.

   $\mathrm{mcd}(\#H_3, \#\mathrm{Aut}(C_{115})) = \mathrm{mcd}(9, 88) = 1 \implies \theta$ banale
   $\implies G \cong C_{115} \times H_3$ abeliano perché $H_3 \cong C_9$ o $C_3^2$ abeliano.

# Esercizio

$\#G = 24 = 2^3 \cdot 3$, $H_2$ 2-Sylow e $H_3$ 3-Sylow tali che $H_2, H_3 \ntriangleleft G$.

1. Determinare $s_2$ e $s_3$.
2. $\exists\, H_3 < H < G$ tale che $\#H = 6$.
3. $K := \cap_{g \in G} g H_2 g^{-1} \triangleleft G$ e $\#K = 4$.
4. Ogni elemento di $G$ è contenuto in un sottogruppo di Sylow.
5. $H \cong S_3$.
6. $G \cong S_4$.

# Esercizio

$\#G = 24 = 2^3 \cdot 3$, $H_2$ 2-Sylow e $H_3$ 3-Sylow tali che $H_2, H_3 \ntriangleleft G$.

1. Determinare $s_2$ e $s_3$.
2. $\exists\, H_3 < H < G$ tale che $\#H = 6$.
3. $K := \bigcap_{g \in G} g H_2 g^{-1} \triangleleft G$ e $\#K = 4$.
4. Ogni elemento di $G$ è contenuto in un sottogruppo di Sylow.
5. $H \cong S_3$.
6. $G \cong S_4$.

1. $s_2 \mid 3,\ s_2 > 1 \implies s_2 = 3$.
   $s_3 \mid 8,\ s_3 \equiv 1 \mod 3,\ s_3 > 1 \implies s_3 = 4$.
2. $H := N(H_3)$ tale che $[G : H] = s_3 = 4 \implies \#H = 24/4 = 6$.
3. $K = \ker(L\colon G \to S(G/H_2)) \triangleleft G$ e $K \subseteq H_2$.
   $H_2 \ntriangleleft G \implies \#K \mid \#H_2 = 8$ e $\#K < 8 \implies \#K \leq 4$.
   $G/K = G/\ker(L) \cong \mathrm{im}(L) < S(G/H_2) \cong S_3 \implies$
   $[G : K] \leq \#S_3 = 6 \implies \#K \geq 24/6 = 4 \implies \#K = 4$.

# Dimostrazione di 4, 5 e 6

4. $T := \{g \in G \, : \, \mathrm{ord}(g) = 3\} \implies \#T = s_3(3-1) = 8$.
Siano $H_2'$ e $H_2''$ gli altri 2-Sylow di $G$. Allora $H_2 \cap H_2' = K$: per il punto precedente $K \subseteq H_2 \cap H_2'$ e vale l'uguale perché $\#(H_2 \cap H_2') \mid 8$, $\#(H_2 \cap H_2') < 8 \implies \#(H_2 \cap H_2') \leq 4$.
Analogamente $H_2 \cap H_2'' = H_2' \cap H_2'' = K$ e quindi
$$H_2 \cup H_2' \cup H_2'' = K \coprod (H_2 \setminus K) \coprod (H_2' \setminus K) \coprod (H_2'' \setminus K),$$
per cui $\#(H_2 \cup H_2' \cup H_2'') = 16 \implies G = T \coprod (H_2 \cup H_2' \cup H_2'')$.
5. Per il punto precedente $G$ non ha elementi di ordine 6 $\implies$ $H \not\cong C_6 \implies H \cong S_3$.
6. $H' := \ker(L \colon G \to S(G/H)) \lhd G$ e $H' \subseteq H \implies H' \lhd H \implies$ $H' = H$ o $H' = \{1\}$ (l'unico sottogruppo normale non banale di $H \cong S_3$ è $H_3 \ntriangleleft G$). Non può essere $H' = H \lhd G$ (perché $N(H) = N(N(H_3)) = N(H_3) = H$) $\implies$ l'omomorfismo $L \colon G \to S(G/H) \cong S_4$ è iniettivo, e anche suriettivo perché $\#G = 24 = \#S_4$.