Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 28-04-2020

Gruppi di ordine 8

$\#G = 8 = 2^3$, G non abeliano.

- $\mathrm{ord}(g) = 2$ o 4 $\forall\, g \in G \setminus \{1\}$ (altrimenti G ciclico).
- $\exists\, a \in G$ tale che $\mathrm{ord}(a) = 4$ (altrimenti $g^2 = 1$ $\forall\, g \in G \implies gghh = 1 = ghgh \implies gh = hg$ $\forall\, g, h \in G$, cioè G abeliano).
- $C_4 \cong K := \langle a \rangle \lhd G$ (perché $[G : K] = 2$).
- Se $\exists\, b \in G \setminus K$ tale che $\mathrm{ord}(b) = 2$, allora $C_2 \cong H := \langle b \rangle < G$ tale che $G = K \rtimes H \cong C_4 \rtimes_\theta C_2$ con $\theta \colon C_2 \to \mathrm{Aut}(C_4) \cong C_2$ l'unico omomorfismo non banale. In questo caso $G \cong D_4$.
- Se invece $\mathrm{ord}(g) = 4$ $\forall\, g \in G \setminus K$, scelgo $b \in G \setminus K \implies bab^{-1} \in K$ e $\mathrm{ord}(bab^{-1}) = \mathrm{ord}(a) \implies bab^{-1} = a$ o a^{-1}.
- $G = \langle a, b \rangle \implies ab \neq ba \implies bab^{-1} = a^{-1}$.
- $\#(K \cap \langle b \rangle) = 2 \implies K \cap \langle b \rangle = \{1, z := a^2 = b^2\}$ con $z \in Z(G)$ (dato che $a, b \in C(z)$) e $a^{-1} = za$, $b^{-1} = zb$.
- $c := ab$ tale che $c^2 = z$, $c^{-1} = zc$, $ba = zc$, $bc = a$, $cb = za$, $ca = b$, $ac = zb$. In questo caso $G \cong Q := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

Gruppi di ordine 12

$\# G = 12 = 2^2 \cdot 3$, G non abeliano.

- $G = K \rtimes H$ con H non normale, K 2-Sylow e H 3-Sylow o K 3-Sylow e H 2-Sylow.
- Non può essere $K \cong C_4$ e $H \cong C_3$ perché l'unico omomorfismo $C_3 \to \mathrm{Aut}(C_4) \cong C_2$ è quello banale.
- $K \cong C_2^2$ e $H \cong C_3 \implies G \cong C_2^2 \rtimes_\theta C_3$ con $\theta\colon C_3 \to \mathrm{Aut}(C_2^2) \cong S_3$ omomorfismo non banale. A meno di isomorfismo G non dipende da θ perché S_3 ha un unico sottogruppo di ordine 3. In questo caso $G \cong A_4$.
- $K \cong C_3$ e $H \cong C_4 \implies G \cong C_3 \rtimes_\theta C_4$ con $\theta\colon C_4 \to \mathrm{Aut}(C_3) \cong C_2$ l'unico omomorfismo non banale.
- $K \cong C_3$ e $H \cong C_2^2 \implies G \cong C_3 \rtimes_\theta C_2^2$ con $\theta\colon C_2^2 \to \mathrm{Aut}(C_3) \cong C_2$ omomorfismo non banale. A meno di isomorfismo G non dipende da θ perché se θ' è un altro omomorfismo non banale, $\exists\, \alpha \in \mathrm{Aut}(C_2^2) \cong S_3$ tale che $\theta = \theta' \circ \alpha$. In questo caso $G \cong D_6$.

Gruppi di ordine < 16

n	classi di isomorfismo di gruppi di ordine n				
2	C_2				
3	C_3				
4	C_4	C_2^2			
5	C_5				
6	C_6	$C_3 \rtimes C_2 \cong D_3$			
7	C_7				
8	C_8	$C_4 \times C_2$	C_2^3	$C_4 \rtimes C_2 \cong D_4$	Q
9	C_9	C_3^2			
10	C_{10}	$C_5 \rtimes C_2 \cong D_5$			
11	C_{11}				
12	C_{12}	$C_6 \times C_2$	$C_2^2 \rtimes C_3 \cong A_4$	$C_3 \rtimes C_2^2 \cong D_6$	$C_3 \rtimes C_4$
13	C_{13}				
14	C_{14}	$C_7 \rtimes C_2 \cong D_7$			
15	C_{15}				

Gruppi di ordine 30

$\#G = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

1. $\exists\, K < G$ tale che $\#K = 15$.
2. $G \cong C_{15} \rtimes_\theta C_2$ per qualche omomorfismo $\theta\colon C_2 \to \mathrm{Aut}(C_{15})$.
3. G è isomorfo a uno e uno solo dei seguenti gruppi: C_{30}, D_{15}, $D_3 \times C_5$ e $D_5 \times C_3$.

Gruppi di ordine 30

$\#G = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

1. $\exists\, K < G$ tale che $\#K = 15$.
2. $G \cong C_{15} \rtimes_\theta C_2$ per qualche omomorfismo $\theta \colon C_2 \to \mathrm{Aut}(C_{15})$.
3. G è isomorfo a uno e uno solo dei seguenti gruppi: C_{30}, D_{15}, $D_3 \times C_5$ e $D_5 \times C_3$.

1. $H_5 < G$ 5-Sylow e $H_3 < G$ 3-Sylow tali che $H_5 \lhd G$ o $H_3 \lhd G$ $\implies K := H_5 H_3 < G$ e $\#K = (\#H_5)(\#H_3) = 5 \cdot 3 = 15$.
2. $K \lhd G$ perché $[G : K] = 2 \implies G = K \rtimes H$ con $H < G$ $2 - \mathit{Sylow}$, e basta osservare che $K \cong C_{15}$ e $H \cong C_2$.
3. $\mathrm{Aut}(C_{15}) \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^* \cong C_4 \times C_2 \implies$

$$\begin{aligned}\#\mathrm{Hom}(C_2, \mathrm{Aut}(C_{15})) &= \#\mathrm{Hom}(C_2, C_4 \times C_2)\\ &= \#\{g \in C_4 \times C_2 \,:\, \mathrm{ord}(g) \mid 2\} = 4\end{aligned}$$

$\implies$ ci sono al più 4 classi di isomorfismo e basta verificare che i 4 elencati sono a due a due non isomorfi (esercizio).

I sottogruppi di S_4

$\exists\, H < S_4$ non banale tale che $H \cong G \iff G$ è isomorfo a uno dei seguenti gruppi: C_2, C_3, C_4, C_2^2, S_3, D_4, A_4.

I sottogruppi di S_4

$\exists\, H < S_4$ non banale tale che $H \cong G \iff G$ è isomorfo a uno dei seguenti gruppi: C_2, C_3, C_4, C_2^2, S_3, D_4, A_4.

$\Longleftarrow$ $H = \langle \sigma \rangle$ con σ m-ciclo $\implies H \cong C_m$ per $m = 2, 3, 4$.
$H = V_4 \implies H \cong C_2^2$.
$H = \{\sigma \in S_4 \,:\, \sigma(4) = 4\} \implies H \cong S_3$.
$H = V_4\langle(1,2)\rangle$ ($H < S_4$ perché $V_4 \lhd S_4$) $\implies \#H = 8$, $\langle(1,2)\rangle < H$ non normale $\implies H \cong D_4$.
$H = A_4 \implies H \cong A_4$.

$\implies$ Chiaro se $\#H \leq 4$.
$\#H = 6 \implies H \not\cong C_6$ (perché S_4 non ha elementi di ordine 6) $\implies H \cong S_3$.
$\#H = 8 \implies H$ 2-Sylow $\implies H \cong D_4$ perché tutti i 2-Sylow sono isomorfi e so già che ce n'è uno di questa forma.
$\#H = 12 \implies [S_4 : H] = 2 \implies H \lhd S_4 \implies H = A_4$ perché A_4 e V_4 sono gli unici sottogruppi normali non banali di S_4.