Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 31-03-2020
(Sezione 13 delle dispense)

Esercizio

Siano I, J due ideali sinistri e P un ideale di un anello A. Siano inoltre M un A-modulo e M' un sottomodulo di M. Dimostrare:

1. $I(M/M') = (IM + M')/M'$;
2. $P(A/J) = (P + J)/J$;
3. $P^i(A/P^j) = P^{\min\{i,j\}}/P^j \ \forall\, i, j \in \mathbb{N}$.

Esercizio

Siano I, J due ideali sinistri e P un ideale di un anello A. Siano inoltre M un A-modulo e M' un sottomodulo di M. Dimostrare:

1. $I(M/M') = (IM + M')/M'$;
2. $P(A/J) = (P + J)/J$;
3. $P^i(A/P^j) = P^{\min\{i,j\}}/P^j \ \forall\, i, j \in \mathbb{N}$.

1. $y \in I(M/M') \implies \exists\, a_1, \dots, a_n \in I$, $x_1, \dots, x_n \in M$ tali che $y = \sum_{i=1}^n a_i \overline{x_i} = \overline{\sum_{i=1}^n a_i x_i} \in (IM + M')/M'$ perché $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in IM \subseteq IM + M'$.

   $\bar{z} \in (IM + M')/M'$ (con $z \in IM + M'$) $\implies \exists\, a_1, \dots, a_n \in I$, $x_1, \dots, x_n \in M$, $x' \in M'$ tali che $z = \sum_{i=1}^n a_i x_i + x' \implies$ $\bar{z} = \overline{\sum_{i=1}^n a_i x_i} = \sum_{i=1}^n a_i \overline{x_i} \in I(M/M')$.

Esercizio

Siano I, J due ideali sinistri e P un ideale di un anello A. Siano inoltre M un A-modulo e M' un sottomodulo di M. Dimostrare:

1. $I(M/M') = (IM + M')/M'$;
2. $P(A/J) = (P + J)/J$;
3. $P^i(A/P^j) = P^{\min\{i,j\}}/P^j \ \forall\, i, j \in \mathbb{N}$.

1. $y \in I(M/M') \implies \exists\, a_1, \dots, a_n \in I$, $x_1, \dots, x_n \in M$ tali che $y = \sum_{i=1}^n a_i \overline{x_i} = \overline{\sum_{i=1}^n a_i x_i} \in (IM + M')/M'$ perché $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in IM \subseteq IM + M'$.
   $\bar{z} \in (IM + M')/M'$ (con $z \in IM + M'$) $\implies \exists\, a_1, \dots, a_n \in I$, $x_1, \dots, x_n \in M$, $x' \in M'$ tali che $z = \sum_{i=1}^n a_i x_i + x' \implies \bar{z} = \overline{\sum_{i=1}^n a_i x_i} = \sum_{i=1}^n a_i \overline{x_i} \in I(M/M')$.
2. Per il punto precedente (dato che $PA = P$ perché P è un ideale) $P(A/J) = (PA + J)/J = (P + J)/J$.

Esercizio

Siano I, J due ideali sinistri e P un ideale di un anello A. Siano inoltre M un A-modulo e M' un sottomodulo di M. Dimostrare:

1. $I(M/M') = (IM + M')/M'$;
2. $P(A/J) = (P + J)/J$;
3. $P^i(A/P^j) = P^{\min\{i,j\}}/P^j \ \forall\, i, j \in \mathbb{N}$.

1. $y \in I(M/M') \implies \exists\, a_1, \dots, a_n \in I$, $x_1, \dots, x_n \in M$ tali che $y = \sum_{i=1}^n a_i \overline{x_i} = \overline{\sum_{i=1}^n a_i x_i} \in (IM + M')/M'$ perché $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in IM \subseteq IM + M'$.
   $\bar{z} \in (IM + M')/M'$ (con $z \in IM + M'$) $\implies \exists\, a_1, \dots, a_n \in I$, $x_1, \dots, x_n \in M$, $x' \in M'$ tali che $z = \sum_{i=1}^n a_i x_i + x' \implies \bar{z} = \overline{\sum_{i=1}^n a_i x_i} = \sum_{i=1}^n a_i \overline{x_i} \in I(M/M')$.
2. Per il punto precedente (dato che $PA = P$ perché P è un ideale) $P(A/J) = (PA + J)/J = (P + J)/J$.
3. Per il punto precedente (dato che $P^i \subseteq P^j$ se $i \geq j$ e $P^j \subseteq P^i$ se $j \geq i$) $P^i(A/P^j) = (P^i + P^j)/P^j = P^{\min\{i,j\}}/P^j$.