

Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 25-03-2020
(Sezioni 11 e 12 delle dispense)

Esempio 11.14

\mathbb{Q} non è un gruppo abeliano finitamente generato: per assurdo

$$\mathbb{Q} = \langle q_1, \dots, q_n \rangle,$$

dove $q_i = \frac{a_i}{b_i}$ (con $a_i \in \mathbb{Z}$ e $b_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) $\forall i = 1, \dots, n$. Posto

$$b := \prod_{i=1}^n b_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

risulta $b'_i := \frac{b}{b_i} \in \mathbb{Z}$ e quindi

$$q_i = \frac{a_i b'_i}{b} \in \langle \frac{1}{b} \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Da ciò seguirebbe $\mathbb{Q} = \langle \frac{1}{b} \rangle$, assurdo perché $\frac{1}{2b} \in \mathbb{Q} \setminus \langle \frac{1}{b} \rangle$.