Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 24-03-2020
(Sezione 10 delle dispense)

Esercizio

Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli commutativi tale che B è un A-modulo finitamente generato.
Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

1. Se A è un anello noetheriano, anche B lo è.
2. Se B è un anello noetheriano, anche A lo è.
3. Se $A[X]$ è un anello noetheriano, anche A lo è.

Esercizio

Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli commutativi tale che B è un A-modulo finitamente generato.
Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

1. Se A è un anello noetheriano, anche B lo è.
2. Se B è un anello noetheriano, anche A lo è.
3. Se $A[X]$ è un anello noetheriano, anche A lo è.

1. Vera: B è un A-modulo noetheriano, quindi è anche un B-modulo noetheriano perché i B-sottomoduli sono in particolare A-sottomoduli.

Esercizio

Sia $f\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli commutativi tale che B è un A-modulo finitamente generato.
Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

1. Se A è un anello noetheriano, anche B lo è.
2. Se B è un anello noetheriano, anche A lo è.
3. Se $A[X]$ è un anello noetheriano, anche A lo è.

1. Vera: B è un A-modulo noetheriano, quindi è anche un B-modulo noetheriano perché i B-sottomoduli sono in particolare A-sottomoduli.
2. Falsa: scelto A non noetheriano, esiste $I \subset A$ ideale massimale e prendo come f la proiezione al quoziente $A \to A/I$ (A/I è un campo, quindi un anello noetheriano).

Esercizio

Sia $f\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli commutativi tale che B è un A-modulo finitamente generato.
Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere.

1. Se A è un anello noetheriano, anche B lo è.
2. Se B è un anello noetheriano, anche A lo è.
3. Se $A[X]$ è un anello noetheriano, anche A lo è.

1. Vera: B è un A-modulo noetheriano, quindi è anche un B-modulo noetheriano perché i B-sottomoduli sono in particolare A-sottomoduli.
2. Falsa: scelto A non noetheriano, esiste $I \subset A$ ideale massimale e prendo come f la proiezione al quoziente $A \to A/I$ (A/I è un campo, quindi un anello noetheriano).
3. Vera: $A \cong A[X]/(X)$ è un anello noetheriano perché (isomorfo a un) quoziente di un anello noetheriano.

Esercizio

Sia A un anello commutativo e M un A-modulo noetheriano tale che $\mathrm{Ann}_A(M) = \{0\}$.

1. Dimostrare che esistono $x_1, \dots, x_n \in M$ tali che $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ann}_A(x_i) = \{0\}$.
2. Dimostrare che A è un anello noetheriano.

Esercizio

Sia A un anello commutativo e M un A-modulo noetheriano tale che $\mathrm{Ann}_A(M) = \{0\}$.

1. Dimostrare che esistono $x_1, \dots, x_n \in M$ tali che $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ann}_A(x_i) = \{0\}$.
2. Dimostrare che A è un anello noetheriano.

1. Esistono $x_1, \dots, x_n \in M$ tali che $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_A$ (perché M è finitamente generato).
   Dato $a \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ann}_A(x_i)$ (cioè $ax_1 = \cdots = ax_n = 0$), $\forall\, x \in M$ esistono $a_1, \dots, a_n \in A$ tali che $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, dunque $ax = a \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i a x_i = 0$.
   Ciò dimostra che $a \in \mathrm{Ann}_A(M) = \{0\}$.

Esercizio

Sia A un anello commutativo e M un A-modulo noetheriano tale che $\mathrm{Ann}_A(M) = \{0\}$.

1. Dimostrare che esistono $x_1, \dots, x_n \in M$ tali che $\bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ann}_A(x_i) = \{0\}$.
2. Dimostrare che A è un anello noetheriano.

1. Esistono $x_1, \dots, x_n \in M$ tali che $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_A$ (perché M è finitamente generato).
   Dato $a \in \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ann}_A(x_i)$ (cioè $ax_1 = \cdots = ax_n = 0$), $\forall\, x \in M$ esistono $a_1, \dots, a_n \in A$ tali che $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, dunque $ax = a \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n a a_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i a x_i = 0$.
   Ciò dimostra che $a \in \mathrm{Ann}_A(M) = \{0\}$.
2. Gli omomorfismi $f_i \colon A \to M$, $a \mapsto ax_i$ ($\forall\, i = 1, \dots, n$) inducono $f \colon A \to M^n$, $a \mapsto (f_1(a), \dots, f_n(a))$ omomorfismo tale che $\ker(f) = \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ann}_A(x_i) = \{0\}$.
   Dunque A è un A-modulo noetheriano perché isomorfo a un sottomodulo di M^n, che lo è.