Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 20-03-2020
(Sezioni 8 e 9 delle dispense)

Osservazione 8.2

Se B è un anello e un A-modulo tale che vale (8.1),

$$f\colon A \to Z(B), \qquad a \mapsto a1_B$$

è un omomorfismo di anelli perché $\forall\, a, a' \in A$ e $\forall\, b \in B$

- $f(1_A) = 1_A 1_B = 1_B$;
- $f(a + a') = (a + a')1_B = a1_B + a'1_B = f(a) + f(a')$;
- $f(aa') = (aa')1_B = a(a'1_B) = af(a') = a(1_B f(a')) = (a1_B)f(a') = f(a)f(a')$ (per la prima uguaglianza in (8.1));
- $f(a)b = (a1_B)b = a(1_B b) = ab = (ab)1_B = b(a1_B) = bf(a)$ (per la seconda uguaglianza in (8.1)), cioè $f(a) \in Z(B)$.

Esempio 9.6

$A = B^\Lambda$ è un anello con prodotto

$$(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}(b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} := (b_\lambda b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

$\forall\,(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in A$.

Esempio 9.6

$A = B^\Lambda$ è un anello con prodotto

$$(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}(b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} := (b_\lambda b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

$\forall\,(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in A$.

Il B-sottomodulo $B^{(\Lambda)} = \{a \in A \,:\, \mathrm{Supp}(a) \text{ è finito}\}$ di A è anche un A-sottomodulo perché $\mathrm{Supp}(aa') \subseteq \mathrm{Supp}(a')\ \forall\, a, a' \in A$.

Esempio 9.6

$A = B^\Lambda$ è un anello con prodotto

$$(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}(b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} := (b_\lambda b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

$\forall\,(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (b'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in A$.

Il B-sottomodulo $B^{(\Lambda)} = \{a \in A \,:\, \mathrm{Supp}(a) \text{ è finito}\}$ di A è anche un A-sottomodulo perché $\mathrm{Supp}(aa') \subseteq \mathrm{Supp}(a')\ \forall\, a, a' \in A$.

$U \subseteq B^{(\Lambda)}$ e $a \in \langle U \rangle_A \implies \mathrm{Supp}(a) \subseteq \mathrm{Supp}(U)$.
Dunque $\langle U \rangle_A \subsetneq B^{(\Lambda)}$ se U è finito, $B \neq \{0\}$ e Λ è infinito.

Esercizio

Sia $f\colon M \to N$ un omomorfismo di A-moduli.

1. Dimostrare che, se $\ker(f)$ e N sono noetheriani, anche M lo è.
2. Dimostrare che, se M e $N/\operatorname{im}(f)$ sono noetheriani, anche N lo è.

Esercizio

Sia $f\colon M \to N$ un omomorfismo di A-moduli.

1. Dimostrare che, se $\ker(f)$ e N sono noetheriani, anche M lo è.
2. Dimostrare che, se M e $N/\operatorname{im}(f)$ sono noetheriani, anche N lo è.

1. M noetheriano $\iff$ $\ker(f)$ e $M/\ker(f)$ noetheriani $\iff$ $M/\ker(f)$ noetheriano (perché $\ker(f)$ lo è per ipotesi); $M/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f)$ (per il primo teorema di isomorfismo) è noetheriano perché N lo è.

Esercizio

Sia $f\colon M \to N$ un omomorfismo di A-moduli.

1. Dimostrare che, se $\ker(f)$ e N sono noetheriani, anche M lo è.
2. Dimostrare che, se M e $N/\operatorname{im}(f)$ sono noetheriani, anche N lo è.

1. M noetheriano $\iff$ $\ker(f)$ e $M/\ker(f)$ noetheriani $\iff$ $M/\ker(f)$ noetheriano (perché $\ker(f)$ lo è per ipotesi); $M/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f)$ (per il primo teorema di isomorfismo) è noetheriano perché N lo è.
2. N noetheriano $\iff$ $\operatorname{im}(f)$ e $N/\operatorname{im}(f)$ noetheriani $\iff$ $\operatorname{im}(f)$ noetheriano (perché $N/\operatorname{im}(f)$ lo è per ipotesi); $\operatorname{im}(f) \cong M/\ker(f)$ (per il primo teorema di isomorfismo) è noetheriano perché M lo è.