Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 17-03-2020
(Sezione 5 delle dispense)

Proposizione 5.1 (parte 1)

$\forall\, x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},\ y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},\ z = (z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e $\forall\, a, b \in A$

- $x + y = (x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (y_\lambda + x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = y + x$;
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ (esercizio);
- $(0)_{\lambda\in\Lambda}$ è elemento neutro di $+$ (esercizio);
- $(-x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è l'opposto di x (esercizio);
- $a(x + y) = a(x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (a(x_\lambda + y_\lambda))_{\lambda\in\Lambda} = (ax_\lambda + ay_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (ax_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (ay_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = ax + ay$;
- $(a + b)x = ax + bx$ (esercizio);
- $(ab)x = a(bx)$ (esercizio);
- $1x = x$ (esercizio).

Proposizione 5.1 (parte 2)

$\forall\, x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ sia

$$\mathrm{Supp}(x) := \{\lambda \in \Lambda \,:\, x_\lambda \neq 0\}.$$

Allora

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \left\{x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \,:\, \mathrm{Supp}(x) \text{ è finito}\right\}$$

è un sottomodulo di $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ perché

- $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \neq \emptyset$ (dato che $\mathrm{Supp}(0) = \emptyset$);
- $x, y \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ implica $x + y \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ (dato che $\mathrm{Supp}(x + y) \subseteq \mathrm{Supp}(x) \cup \mathrm{Supp}(y)$);
- $a \in A$ e $x \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ implica $ax \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ (dato che $\mathrm{Supp}(ax) \subseteq \mathrm{Supp}(x)$).

Proposizione 5.3

Per $\Lambda = \{1, 2\}$ la proprietà universale del prodotto

$$\begin{tikzcd} & M_1 \\ M \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_2"'] & M_1 \times M_2 \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\ & M_2 \end{tikzcd}$$

Proposizione 5.3

Per $\Lambda = \{1, 2\}$ la proprietà universale del prodotto

$$
\begin{tikzcd}
 & & M_1 \\
M \arrow[urr, "f_1"] \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[drr, "f_2"'] & & M_1 \times M_2 \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\
 & & M_2
\end{tikzcd}
$$

e del coprodotto o somma diretta

$$
\begin{tikzcd}
 & & M_1 \arrow[dll, "f_1"'] \arrow[d, "\mathrm{in}_1"] \\
M & & M_1 \bigoplus M_2 \arrow[ll, dashed, "f"'] \\
 & & M_2 \arrow[ull, "f_2"] \arrow[u, "\mathrm{in}_2"']
\end{tikzcd}
$$

Proposizione 5.3 (dimostrazione)

1. f è A-lineare perché $\forall\, x, y \in M$ e $\forall\, a \in A$
   - $f(x+y) = (f_\lambda(x+y))_{\lambda\in\Lambda} = (f_\lambda(x) + f_\lambda(y))_{\lambda\in\Lambda} = (f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} + (f_\lambda(y))_{\lambda\in\Lambda} = f(x) + f(y)$;
   - $f(ax) = (f_\lambda(ax))_{\lambda\in\Lambda} = (af_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} = a(f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} = af(x)$.

Proposizione 5.3 (dimostrazione)

1. f è A-lineare perché $\forall\, x, y \in M$ e $\forall\, a \in A$
   - $f(x+y) = (f_\lambda(x+y))_{\lambda\in\Lambda} = (f_\lambda(x) + f_\lambda(y))_{\lambda\in\Lambda} = (f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} + (f_\lambda(y))_{\lambda\in\Lambda} = f(x) + f(y)$;
   - $f(ax) = (f_\lambda(ax))_{\lambda\in\Lambda} = (af_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} = a(f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} = af(x)$.
2. f è A-lineare perché $\forall\, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e $\forall\, a \in A$
   - $f((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = f((x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda + y_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(f_\lambda(x_\lambda) + f_\lambda(y_\lambda)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda) + \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(y_\lambda) = f((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) + f((y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$;
   - $f(a(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = f((ax_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(ax_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} af_\lambda(x_\lambda) = a\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda) = af((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$.