

Algebra 2

Alberto Canonaco
alberto.canonaco@unipv.it

Università di Pavia
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2019/2020
Lezione del 17-03-2020
(Sezione 5 delle dispense)

Proposizione 5.1 (parte 1)

$\forall x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, y = (y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, z = (z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ e $\forall a, b \in A$

- ▶ $x + y = (x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (y_\lambda + x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = y + x$;
- ▶ $(x + y) + z = x + (y + z)$ (**esercizio**);
- ▶ $(0)_{\lambda \in \Lambda}$ è elemento neutro di $+$ (**esercizio**);
- ▶ $(-x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è l'opposto di x (**esercizio**);
- ▶ $a(x + y) = a(x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (a(x_\lambda + y_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} = (ax_\lambda + ay_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (ax_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} + (ay_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = ax + ay$;
- ▶ $(a + b)x = ax + bx$ (**esercizio**);
- ▶ $(ab)x = a(bx)$ (**esercizio**);
- ▶ $1x = x$ (**esercizio**).

Proposizione 5.1 (parte 2)

$\forall x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ sia

$$\text{Supp}(x) := \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}.$$

Allora

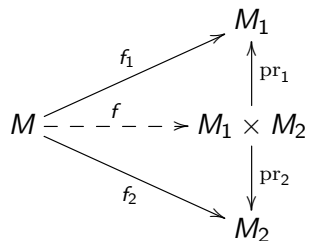
$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \left\{ x \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda : \text{Supp}(x) \text{ è finito} \right\}$$

è un sottomodulo di $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ perché

- ▶ $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \neq \emptyset$ (dato che $\text{Supp}(0) = \emptyset$);
- ▶ $x, y \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ implica $x + y \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ (dato che $\text{Supp}(x + y) \subseteq \text{Supp}(x) \cup \text{Supp}(y)$);
- ▶ $a \in A$ e $x \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ implica $ax \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ (dato che $\text{Supp}(ax) \subseteq \text{Supp}(x)$).

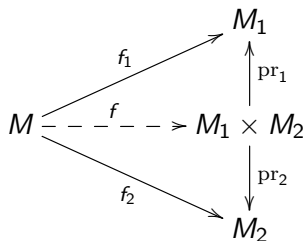
Proposizione 5.3

Per $\Lambda = \{1, 2\}$ la proprietà universale del prodotto

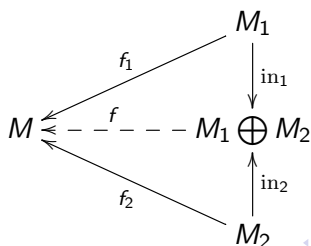


Proposizione 5.3

Per $\Lambda = \{1, 2\}$ la proprietà universale del prodotto



e del coprodotto o somma diretta



Proposizione 5.3 (dimostrazione)

1. f è A -lineare perché $\forall x, y \in M$ e $\forall a \in A$

$$\blacktriangleright f(x + y) = (f_\lambda(x + y))_{\lambda \in \Lambda} = (f_\lambda(x) + f_\lambda(y))_{\lambda \in \Lambda} = (f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda} + (f_\lambda(y))_{\lambda \in \Lambda} = f(x) + f(y);$$

$$\blacktriangleright f(ax) = (f_\lambda(ax))_{\lambda \in \Lambda} = (af_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda} = a(f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda} = af(x).$$

Proposizione 5.3 (dimostrazione)

1. f è A -lineare perché $\forall x, y \in M$ e $\forall a \in A$
 - ▶ $f(x + y) = (f_\lambda(x + y))_{\lambda \in \Lambda} = (f_\lambda(x) + f_\lambda(y))_{\lambda \in \Lambda} = (f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda} + (f_\lambda(y))_{\lambda \in \Lambda} = f(x) + f(y)$;
 - ▶ $f(ax) = (f_\lambda(ax))_{\lambda \in \Lambda} = (af_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda} = a(f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda} = af(x)$.
2. f è A -lineare perché $\forall (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ e $\forall a \in A$
 - ▶ $f((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} + (y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = f((x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x_\lambda + y_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (f_\lambda(x_\lambda) + f_\lambda(y_\lambda)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x_\lambda) + \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(y_\lambda) = f((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) + f((y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$;
 - ▶ $f(a(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = f((ax_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(ax_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} af_\lambda(x_\lambda) = a \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x_\lambda) = af((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$.