Istituzioni di Algebra
A. A. 2018/2019
Programma svolto da Alberto Canonaco

Moduli su un anello (commutativo con unità); se K è un campo, un K-modulo è un K-spazio vettoriale; ogni gruppo abeliano ha un'unica struttura di $\mathbb{Z}$-modulo. Sottomoduli; gli A-sottomoduli di A sono gli ideali di A. L'intersezione di sottomoduli, la somma di sottomoduli e il prodotto di un ideale per un sottomodulo sono sottomoduli; ideale quoziente di due sottomoduli, annullatore di un modulo e moduli fedeli. Sottomodulo generato da un sottoinsieme e insiemi di generatori di un modulo; moduli finitamente generati e moduli ciclici.

Omomorfismi e isomorfismi di moduli. Immagine e controimmagine di sottomoduli attraverso un omomorfismo di moduli sono sottomoduli (in particolare, nucleo e immagine di un omomorfismo di moduli sono sottomoduli); l'immagine del sottomodulo generato da un sottoinsieme è generata dall'immagine del sottoinsieme. Quoziente M/N di un modulo M per un sottomodulo N; la proiezione naturale $M \to M/N$ è un omomorfismo suriettivo di moduli con nucleo N; i sottomoduli di M/N sono tutti e soli della forma P/N con P sottomodulo di M contenente N. Conucleo di un omomorfismo di moduli; il conucleo è nullo se e solo se l'omomorfismo è suriettivo. Teoremi di omomorfismo e di isomorfismo per moduli.

Restrizione degli scalari attraverso un omomorfismo di anelli. Algebre su un anello; dare una struttura di A-algebra su un anello B equivale a dare un omomorfismo di anelli $A \to B$; omomorfismi di algebre; algebre finite e algebre finitamente generate.

Prodotto e somma diretta di moduli e loro proprietà universali; somma diretta di sottomoduli. Moduli liberi; un modulo è libero se e solo se ha una base; ogni modulo è isomorfo a un quoziente di un modulo libero; un A-modulo è finitamente generato (rispettivamente ciclico) se e solo se è isomorfo a un quoziente di A^n per qualche n (rispettivamente di A). Un anello non nullo A è un campo se e solo se tutti gli A-moduli sono liberi; il rango (cioè la cardinalità di una base) di un modulo libero è ben definito. Teorema di struttura per moduli finitamente generati su un dominio a ideali principali (solo enunciato).

Complessi e successioni esatte (in particolare corte) di moduli; spezzamento di successioni esatte corte. Gli omomorfismi tra due A-moduli M e N formano un A-modulo $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ (isomorfo a N se $M = A$). Proprietà funtoriali di Hom_A: è controvariante nel primo argomento, covariante nel secondo, A-lineare, esatto a sinistra e commuta con i prodotti in entrambi.

Sistemi moltiplicativi in un anello; le potenze di un elemento e il complementare di un ideale primo sono sistemi moltiplicativi. Localizzazione $S^{-1}A$ di un anello A rispetto a un sistema moltiplicativo S; proprietà universale della localizzazione. Localizzazione di moduli; esattezza della localizzazione. Relazione tra gli ideali di A e gli ideali di $S^{-1}A$. Spettro (primo) $\mathrm{Spec}(A)$ e spettro massimale $\mathrm{Spm}(A)$ di A; un omomorfismo di anelli $f\colon A \to B$ induce una funzione $\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, $\mathrm{q} \mapsto f^{-1}(\mathrm{q})$. Corrispondenza biunivoca tra $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ e $\{\mathrm{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathrm{p} \cap S = \emptyset\}$. Anelli locali; $A_{\mathrm{p}} := (A \setminus \mathrm{p})^{-1}A$ è un anello locale per ogni ideale primo p di A.

Nilradicale di un anello e radicale di un ideale; il nilradicale è l'intersezione di tutti gli ideali primi e il radicale di un ideale I è l'intersezione degli ideali primi contenenti I. Radicale di Jacobson di un anello; un elemento a di un anello A appartiene al radicale di Jacobson se e solo se $1 - ab \in A^*$ per ogni $b \in A$. Lemma di Nakayama.

Moduli noetheriani e moduli artiniani; data una successione esatta corta di moduli $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, M è noetheriano (rispettivamente artiniano) se e solo se M' e M'' lo sono. Moduli semplici e serie di composizione di un modulo; un modulo ha una serie di composizione se e solo se è noetheriano e artiniano. Teorema di Jordan-Hölder: la lunghezza e i fattori di composizione (a meno dell'ordine e di isomorfismo) di una serie di composizione di un modulo noetheriano e artiniano sono ben definiti.

Anelli noetheriani e anelli artiniani; se un anello A è noetheriano (rispettivamente artiniano), lo sono anche ogni A-modulo finitamente generato, ogni A-algebra finita e ogni localizzazione di A. Un modulo è noetheriano se e solo se ogni suo sottomodulo è finitamente generato; su un anello noetheriano un modulo è noetheriano se e solo se è finitamente generato. Teorema della base di Hilbert; ogni algebra finitamente generata su un anello noetheriano è noetheriana.

Dimensione (di Krull) $\dim(A)$ di un anello non nullo A; $\dim(A) = 0$ se e solo se $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spm}(A)$; se A è un dominio a ideali principali, $\dim(A) \leq 1$ e $\dim(A) = 0$ se e solo se A è un campo; se $\dim(A) = n$, $\dim(A[X]) \geq n + 1$. In un anello artiniano o noetheriano il nilradicale è nilpotente ed è intersezione finita di ideali primi; se A è artiniano, $\mathrm{Spec}(A)$ è finito. Se in un anello A si può ottenere l'ideale nullo come prodotto finito di ideali massimali, un A-modulo è artiniano se e solo se è noetheriano. Un anello non nullo è artiniano se e solo se è noetheriano e ha dimensione 0; su un anello artiniano un modulo è artiniano se e solo se è noetheriano se e solo se è finitamente generato.

Prodotto tensoriale di moduli e sua esistenza e unicità a meno di isomorfismo; le classi di isomorfismo degli A-moduli con il prodotto tensoriale formano un monoide commutativo (con elemento neutro A). Proprietà funtoriali del prodotto tensoriale: è covariante, A-lineare, esatto a destra e commuta con le somme dirette in entrambi gli argomenti. Estensione degli scalari attraverso un omomorfismo di anelli; se I è un ideale di A e M un A-modulo, c'è un isomorfismo naturale di A/I-moduli

$A/I \otimes_A M \cong M/IM$; se S è un sistema moltiplicativo di A e M un A-modulo, c'è un isomorfismo naturale di $S^{-1}A$-moduli $S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$.

Richiami su elementi interi e estensioni intere di anelli; algebre intere o omomorfismi interi di anelli; un'algebra è finita se e solo se è intera e finitamente generata. Per le algebre la proprietà di essere intera o finitamente generata è stabile per composizione, passaggio al quoziente e localizzazione. Se $f\colon A \to B$ è un omomorfismo intero e $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$, allora $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spm}(B)$ se e solo se $f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spm}(A)$. Per un'estensione intera $i\colon A \hookrightarrow B$ valgono "incomparable" (cioè nessuna fibra di $\operatorname{Spec}(i)$ può contenere due primi distinti inclusi uno nell'altro), "lying over" (cioè $\operatorname{Spec}(i)$ è suriettiva), "going up" e $\dim(B) = \dim(A)$; se inoltre l'estensione è finita, allora le fibre di $\operatorname{Spec}(i)$ sono finite.

Se K è un campo e $A = K[x_1, \dots, x_n]$ è una K-algebra finitamente generata non nulla, per ogni $f \in K[X_1, \dots, X_n] \setminus K$, posto $y := f(x_1, \dots, x_n) \in A$, esistono $y_1, \dots y_{n-1} \in A$ tali che A è finita su $K[y_1, \dots, y_{n-1}, y]$; inoltre $\dim(A) \leq n$ e $\dim(K[X_1, \dots, X_n]) = n$. Lemma di normalizzazione di Noether: se A è una K-algebra finitamente generata non nulla, esistono $d = \dim(A)$ elementi $x_1, \dots, x_d \in A$ algebricamente indipendenti su K tali che A è finita su $K[x_1, \dots, x_d]$. Se A è una K-algebra finitamente generata non nulla, allora A è una K-algebra finita se e solo se A è artiniana se e solo se $\dim(A) = 0$; versione algebrica del teorema degli zeri di Hilbert: se un campo è una K-algebra finitamente generata, allora è una K-algebra finita. Se $f\colon A \to B$ è un omomorfismo di K-algebre con B finitamente generata e $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spm}(B)$, allora $f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spm}(A)$ (quindi $\operatorname{Spec}(f)$ si restringe a una funzione $\operatorname{Spm}(f)\colon \operatorname{Spm}(B) \to \operatorname{Spm}(A)$). Una K-algebra finitamente generata è un anello di Jacobson (cioè il radicale di un ideale I è l'intersezione degli ideali massimali contenenti I).

Topologia di Zariski su $\operatorname{Spec}(A)$; se f è un omomorfismo di anelli, $\operatorname{Spec}(f)$ è continua (e lo stesso vale per $\operatorname{Spm}(f)$ se A e B sono algebre finitamente generate su un campo). Corrispondenza biunivoca tra i chiusi di $\operatorname{Spec}(A)$ (o di $\operatorname{Spm}(A)$ se A è un anello di Jacobson) e gli ideali radicali di A; se $A = K[X_1, \dots, X_n]$ con K campo algebricamente chiuso, si può identificare $\operatorname{Spm}(A)$ con lo spazio affine di dimensione n su K, e si ottiene una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi algebrici affini (cioè i chiusi di tale spazio) e gli ideali radicali di A (versione geometrica del teorema degli zeri). Alcune proprietà della topologia di Zariski: $\operatorname{Spec}(A)$ è T_0 e i punti chiusi sono gli ideali massimali; un chiuso di $\operatorname{Spec}(A)$ è irriducibile (cioè non è vuoto e non è unione di due chiusi propri) se e solo se corrisponde a un ideale primo di A; se $I \subseteq A$ è un ideale, $\operatorname{Spec}(A/I)$ è omeomorfo al chiuso di $\operatorname{Spec}(A)$ definito da I. Cenni sull'anello delle coordinate di un insieme algebrico affine, sugli insiemi algebrici quasi-affini, sulle funzioni regolari e sui morfismi di insiemi algebrici (quasi)affini.