Istituzioni di Algebra
A. A. 2017/2018
Programma svolto da Alberto Canonaco

Moduli su un anello (commutativo con unità); se K è un campo, un K-modulo è un K-spazio vettoriale; ogni gruppo abeliano ha un'unica struttura di $\mathbb{Z}$-modulo. Sottomoduli; gli A-sottomoduli di A sono gli ideali di A. L'intersezione di sottomoduli, la somma di sottomoduli e il prodotto di un ideale per un sottomodulo sono sottomoduli; ideale quoziente di due sottomoduli, annullatore di un modulo e moduli fedeli. Sottomodulo generato da un sottoinsieme e insiemi di generatori di un modulo; moduli finitamente generati e moduli ciclici. Omomorfismi e isomorfismi di moduli. Immagine e controimmagine di sottomoduli attraverso un omomorfismo di moduli sono sottomoduli (in particolare, nucleo e immagine di un omomorfismo di moduli sono sottomoduli); l'immagine del sottomodulo generato da un sottoinsieme è generata dall'immagine del sottoinsieme. Quoziente M/N di un modulo M per un sottomodulo N; la proiezione naturale $M \to M/N$ è un omomorfismo suriettivo di moduli con nucleo N; i sottomoduli di M/N sono tutti e soli della forma P/N con P sottomodulo di M contenente N. Conucleo di un omomorfismo di moduli; il conucleo è nullo se e solo se l'omomorfismo è suriettivo. Teoremi di omomorfismo e di isomorfismo per moduli.

Prodotto e somma diretta di moduli e loro proprietà universali; somma diretta di sottomoduli. Moduli liberi e basi di un modulo libero; ogni modulo è isomorfo a un quoziente di un modulo libero; un A-modulo è finitamente generato (rispettivamente ciclico) se e solo se è isomorfo a un quoziente di A^n per qualche n (rispettivamente di A). Un anello non nullo A è un campo se e solo se tutti gli A-moduli sono liberi. Restrizione degli scalari attraverso un omomorfismo di anelli. Algebre su un anello; dare una struttura di A-algebra su un anello B equivale a dare un omomorfismo di anelli $A \to B$; omomorfismi di algebre; algebre finite e algebre finitamente generate.

Complessi e successioni esatte (in particolare corte) di moduli; spezzamento di successioni esatte corte. Gli omomorfismi tra due A-moduli M e N formano un A-modulo $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ (isomorfo a N se $M = A$). Proprietà funtoriali di Hom_A: è controvariante nel primo argomento, covariante nel secondo, A-lineare, esatto a sinistra e commuta con i prodotti in entrambi. Prodotto tensoriale di moduli e sua esistenza e unicità a meno di isomorfismo; le classi di isomorfismo degli A-moduli con il prodotto tensoriale formano un monoide commutativo (con elemento neutro A). Proprietà funtoriali del prodotto tensoriale: è covariante, A-lineare, esatto a destra e commuta con le somme dirette in entrambi gli argomenti. Estensione degli scalari attraverso un omomorfismo di anelli; se I è un ideale di A e M un A-modulo, c'è un isomorfismo naturale di A/I-moduli $A/I \otimes_A M \cong M/IM$.

Sistemi moltiplicativi in un anello; le potenze di un elemento e il complementare di un ideale primo sono sistemi moltiplicativi. Localizzazione $S^{-1}A$ di un anello A rispetto a un sistema moltiplicativo S; proprietà universale della localizzazione. Localizzazione di moduli; esattezza della localizzazione; per ogni A-modulo M c'è un isomorfismo naturale di $S^{-1}A$-moduli $S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$. Relazione tra gli ideali di A e gli ideali di $S^{-1}A$; corrispondenza biunivoca tra gli ideali primi di $S^{-1}A$ e gli ideali primi di A che non intersecano S. Anelli locali; $A_{\mathrm{p}} := (A \setminus \mathrm{p})^{-1}A$ è un anello locale per ogni ideale primo p di A. Nilradicale di un anello e radicale di un ideale; il nilradicale è l'intersezione di tutti gli ideali primi e il radicale di un ideale I è l'intersezione degli ideali primi contenenti I. Radicale di Jacobson di un anello; lemma di Nakayama.

Moduli artiniani e moduli noetheriani; data una successione esatta corta di moduli, il termine centrale è artiniano (rispettivamente noetheriano) se e solo se i due termini estremi lo sono. Anelli artiniani e anelli noetheriani; se un anello A è artiniano (rispettivamente noetheriano), lo sono anche ogni A-modulo finitamente generato, ogni A-algebra finita e ogni localizzazione di A. Un modulo è noetheriano se e solo se ogni suo sottomodulo è finitamente generato; su un anello noetheriano un modulo è noetheriano se e solo se è finitamente generato. Teorema della base di Hilbert; ogni algebra finitamente generata su un anello noetheriano è noetheriana. Dimensione (di Krull) di un anello non nullo; se A è un dominio a ideali principali, $\dim(A) \leq 1$ e $\dim(A) = 0$ se e solo se A è un campo; se $\dim(A) = n$, $\dim(A[X]) \geq n+1$. In un anello artiniano o noetheriano il nilradicale è nilpotente ed è intersezione finita di ideali primi; un anello artiniano ha un numero finito di ideali massimali. Se in un anello A si può ottenere l'ideale nullo come prodotto finito di ideali massimali, un A-modulo è artiniano se e solo se è noetheriano. Un anello non nullo è artiniano se e solo se è noetheriano e ha dimensione 0; su un anello artiniano un modulo è artiniano se e solo se è noetheriano se e solo se è finitamente generato.

Elementi interi su un anello; condizioni equivalenti perché un elemento sia intero. Se B è una A-algebra, gli elementi di B interi su A sono un sottoanello di B. Algebre intere; un'algebra è finita se e solo se è intera e finitamente generata. Proprietà delle algebre intere: stabilità per composizione, passaggio al quoziente e localizzazione, "incomparable", "lying over" e "going up"; se B è intero su un suo sottoanello A, allora $\dim(B) = \dim(A)$. Domini integralmente chiusi; ogni dominio a fattorizzazione unica è integralmente chiuso. Cenni sui domini di Dedekind e sugli anelli degli interi algebrici nei campi di numeri.

Lemma di normalizzazione di Noether: se K è un campo e A è una K-algebra finitamente generata non nulla, esiste un omomorfismo iniettivo e finito di K-algebre $K[X_1, \ldots, X_d] \to A$ con $d = \dim(A)$. Versione algebrica del teorema degli zeri di Hilbert: se un campo è una K-algebra finitamente generata, allora è una K-algebra finita. La controimmagine attraverso un omomorfismo di K-

algebre finitamente generate di un ideale massimale è massimale; una K-algebra finitamente generata è un anello di Jacobson, cioè il radicale di un ideale I è l'intersezione degli ideali massimali contenenti I.

Spettro (primo) $\mathrm{Spec}(A)$ e spettro massimale $\mathrm{Spm}(A)$ di un anello A. Topologia di Zariski su $\mathrm{Spec}(A)$; un omomorfismo di anelli $A \to B$ induce una funzione continua $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ (e anche $\mathrm{Spm}(B) \to \mathrm{Spm}(A)$ se A e B sono algebre finitamente generate su un campo). Corrispondenza biunivoca tra i chiusi di $\mathrm{Spec}(A)$ e gli ideali radicali di A; alcune proprietà della topologia di Zariski. Se $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ con K campo algebricamente chiuso, si può identificare $\mathrm{Spm}(A)$ con lo spazio affine di dimensione n su K, e si ottiene una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi algebrici affini (cioè i chiusi di tale spazio) e gli ideali radicali di A (versione geometrica del teorema degli zeri). Cenni sugli insiemi algebrici quasi-affini, sulle funzioni regolari, sui morfismi di insiemi algebrici (quasi)affini e sull'interpretazione geometrica del lemma di normalizzazione di Noether.