GEOMETRIA B

Quinto scritto a.a. 09/10: 16 settembre 2010

Esercizio 1. Nel piano euclideo siano (x, y) coordinate cartesiane ortogonali, e siano $[x_1, x_2, x_3]$ le corrispondenti coordinate omogenee nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

1) Sia Ω l'omotetia di centro O che porta il punto $(1, 0)$ nel punto $(2, 0)$. Si estenda Ω a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ e, in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, se ne trovino punti fissi e rette fisse.

2) Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ la conica di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 - 3x_3^2 = 0.$$

Si classifichi Γ dai punti di vista proiettivo, affine, euclideo.

3) Sia Γ_0 l'intersezione di Γ con il piano euclideo. Si trovi $\Omega(\Gamma_0)$. Si trovino le componenti connesse per archi del complementare di $\Gamma_0 \cup \Omega(\Gamma_0)$ nel piano euclideo. Si dica quali - tra esse - sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 2. Sia $\sigma\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ la curva data da

$$\sigma(t) = \left(t - \frac{1}{2\sqrt{2}}t^2,\, t + \frac{1}{2\sqrt{2}}t^2,\, \log t \right).$$

1) Mostrare che σ è una curva biregolare.

2) Sia $p = (1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0) \in \mathbb{R}^3$. Mostrare che p appartiene al sostegno di σ, e calcolare il sistema di riferimento di Frenet e la curvatura di σ in p.

3) Mostrare che il sostegno di σ è contenuto nella superficie regolare

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y > 0,\ z = \log\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\}$$

e calcolare la curvatura normale di S in p lungo $\mathbf{t}_0$, dove $\mathbf{t}_0$ è il versore tangente a σ in p.

4) Dire se esiste una riparametrizzazione di σ che sia una geodetica per S.

Esercizio 3. Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ il toro ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza nel piano (x, z) di centro $(2, 0, 0)$ e raggio 1. Sia $R \subset T$ la regione regolare data da

$$R = \{(x, y, z) \in T \mid x \geq 0, z \geq 0\}.$$

Calcolare l'integrale su R della curvatura gaussiana di T.