GEOMETRIA B

Quarto scritto a.a. 09/10: 12 luglio 2010

Esercizio 1. Nel piano euclideo siano (x, y) coordinate cartesiane ortogonali, e siano $[x_1, x_2, x_3]$ le corrispondenti coordinate omogenee nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

1) Siano S la simmetria rispetto all'asse x, T la traslazione che porta l'origine nel punto $(2, 0)$, e $G = T \circ S$. Si estenda G a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ e in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ si trovino punti fissi e rette fisse.

2) Si consideri poi in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ la conica Γ di equazione $x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 = 0$. Si classifichi Γ dai punti di vista proiettivo e affine.

3) Sia Γ_0 l'intersezione del supporto di Γ con il piano euclideo. Si trovi $G(\Gamma_0)$. Si mostri che $G(\Gamma_0) = R(\Gamma_0)$, dove R è la simmetria rispetto all'origine.

Esercizio 2. Sia $T \subset \mathbb{R}^3$ il toro ottenuto ruotando attorno all'asse z la circonferenza nel piano (x, z) di centro $(2, 0, 0)$ e raggio 1. Sia $R \subset T$ la regione regolare data da

$$R = \{(x, y, z) \in T \mid x \geq 0, y \geq 0\}.$$

1) Calcolare l'integrale su R della curvatura gaussiana di T.

2) Mostrare che R è uno spazio topologico connesso per archi e calcolarne il gruppo fondamentale.

Esercizio 3. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

1) Mostrare che S è una superficie regolare e orientabile.

2) Calcolare la seconda forma fondamentale di S nel punto $p = (0, 0, 2)$.

3) Sia $C \subset S$ una curva biregolare passante per p, avente in p tangente parallela all'asse y e versore binormale $(\sqrt{3}/2, 0, 1/2)$. Calcolare la curvatura di C in p.