GEOMETRIA B

Secondo scritto a.a. 08/09: 16 febbraio 2009

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione data da

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 - z^3 + 2,$$

e sia $S := f^{-1}(0)$.

1) Mostrare che S è una superficie regolare.

2) Mostrare che S è orientabile, e determinare un campo di versori normali $\mathcal{C}^\infty$ su S.

3) Sia $\alpha\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\alpha(t) = (t, 0, (t^3+2)^{\frac{1}{3}}).$$

Mostrare che α è una curva regolare contenuta in S e calcolare la sua curvatura.

4) Dire se, parametrizzando α per lunghezza d'arco, si ottiene una geodetica.

Esercizio 2. Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} S =& \{(x,y,z) \mid (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ T =& \{(x,y,z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ D =& \{(x,y,z) \mid x = 0, y^2 + z^2 < 1\} \end{aligned}$$

e poniamo $X := S \cup D$ e $Y = S \cup T$, con la topologia indotta da $\mathbb{R}^3$.

1) Mostrare che X è semplicemente connesso.

2) Mostrare che Y è connesso per archi e determinare il suo gruppo fondamentale.

Esercizio 3. Consideriamo i seguenti punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$p_1 = (1 : \sqrt{3} : 0), \quad p_2 = (-\frac{1}{2} : \frac{5}{3} : \sqrt{2}), \quad p_3 = (0 : -7 : 1),$$

$$q_1 = (2 : \frac{1}{3} : 0), \quad q_2 = (6 : -1 : 1), \quad q_3 = (0 : 1 : a)$$

dove $a \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori di a esiste una proiettività F di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $F(p_i) = q_i$ per $i = 1, 2, 3$.