

CORSO DI GEOMETRIA B

Appello del 25 giugno 2008

Esercizio 1

Si consideri la seguente curva

$$\gamma : \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \left(1 + 2 \log t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right).$$

- (1) Verificare che γ è una curva regolare C^∞ .
- (2) Determinare curvatura e torsione di γ .
- (3) Determinare il piano osculatore nel punto $\gamma(1)$.
- (4) Dire se la curva è piana.

Esercizio 2 Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ l'immagine dell'applicazione $\underline{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{x}(u, v) = (1 + u^4 + v^4, u, v)$.

- (1) Mostrare che S è una superficie regolare orientabile di classe C^∞ .
- (2) Calcolare la prima e la seconda forma fondamentale di S nel punto $\underline{x}(u, v)$.
- (3) Determinare la natura dei punti di S al variare di (u, v) .
- (4) Determinare le direzioni principali di curvatura nei punti della curva coordinata $\underline{x}(u, 0)$.
- (5) Dire se S è localmente isometrica a $S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

Esercizio 3 Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano, si consideri la conica C di equazione:

$$y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_1y_2 + y_1 - 4y_2 - 1 = 0.$$

- (1) Riconoscere la conica.
- (2) Trovare la chiusura proiettiva della conica e, se esistono, i punti impropri.