CORSO DI GEOMETRIA B

Appello del 18 settembre 2007

Esercizio 1
Si consideri la seguente curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$:
$$\gamma(t) = (\sin t, \frac{1}{4}t^4, \cos t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

(1) Verificare che γ è una curva regolare C^∞.
(2) Determinare curvatura e torsione di γ in $\gamma(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
(3) Determinare il triedro di Frenet nel punto $\gamma(0)$.
(4) Determinare il piano osculatore nel punto $\gamma(0)$.
(5) Dire se la curva è piana.

Esercizio 2
Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie S parametrizzata da
$$\underline{x} : \mathbb{R}^2 \to S,$$
$$\underline{x}(u, v) = (u, v, u^2 - 2v^2),$$
S' la superficie parametrizzata da
$$\underline{y} : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 2\pi,\ v > 0\} \to S',$$
$$\underline{y}(u, v) = ((1 + v^2)\cos u, (1 + v^2)\sin u, v^3).$$

(1) Verificare che S e S' sono superfici regolari orientabili di classe C^∞.
(2) Calcolare prima e seconda forma fondamentale sia di S che di S'.
(3) Calcolare la curvatura Gaussiana sia di S che di S' al variare di (u, v).
(4) Dire se S e S' sono localmente isometriche.
(5) Dire se esiste una retta contenuta in S.
(6) Dire se esiste una retta contenuta in S'.

Esercizio 3
Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano, si consideri la conica C di equazione:
$$y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 + 2y_1 + 2y_2 - 4 = 0.$$

(1) Riconoscere la conica.
(2) Determinare la forma canonica euclidea della conica C.
(3) Trovare la chiusura proiettiva della conica e i punti impropri.