Corso di Geometria 2 - a.a. 2012-2013

Prova scritta del 21-01-2014

Esercizio 1

Si consideri la superficie parametrizzata $S \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x}(u,v) = (2v - u, v - 2u, -2u^2 + 5uv - 2v^2), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Calcolare l'equazione del piano tangente affine $T_P(S)$ nel punto generico $P = \mathbf{x}(u,v)$.
2. Stabilire la natura dei punti di S.
3. Determinare le direzioni asintotiche nel punto $Q = \mathbf{x}(0,0)$.
4. Sia C la curva intersezione di S con il piano π di equazione $x + y = 0$.
   (a) Verificare che C è una curva biregolare passante per il punto Q.
   (b) Determinare curvatura e torsione di C.
   (c) Calcolare il versore tangente a C nel punto Q.
5. Dimostrare che la direzione tangente a C nel punto Q è una direzione principale di S in Q. Determinare l'altra direzione principale di S in Q.

Esercizio 2

Siano $f, g \colon X \to Y$ due funzioni continue con Y connesso per archi.

1. Dimostrare che f e g sono omotope se X o Y è contraibile.
2. Se $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $Y = S^1$, fornire un esempio in cui f e g non sono omotope.

Esercizio 3

Si consideri il sottospazio topologico $M \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ definito da

$$M = \{(v,w) : ||v|| = ||w|| = 1, v \cdot w = 0\}.$$

Si denoti con $\pi \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proiezione sul primo fattore.

1. Dimostrare che M ammette una struttura di varietà differenziabile di dimensione 3, tale che π induce una sommersione
$$\pi|_M \colon M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3.$$
2. Esistono applicazioni differenziabili $f : S^2 \to M$ tali che $\pi \circ f$ sia l'identità su S^2? Motivare la risposta.