Corso di Geometria 2 - a.a. 2012-2013

Prova scritta del 16-09-2013

Esercizio 1

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie parametrica di equazioni:

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2} - \frac{v^3}{3}), \qquad (u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Determinare U affinché S sia una superficie regolare di classe C^∞.
2. Calcolare curvatura Guassiana e media in un punto generico di S.
3. Determinare la natura dei punti di S.
4. Trovare la curvatura della sezione normale di S in $p = \mathbf{x}(1,1)$ determinata dal versore $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$.

Esercizio 2

Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^n$ tali che $A \cap B \neq \emptyset$.

1. Dimostrare che se A e B sono convessi, allora $A \cap B$ è convesso e $A \cup B$ è semplicemente connesso.
2. È vero che se A e B sono contraibili, allora $A \cup B$ è semplicemente connesso?

Esercizio 3

1. Siano x, y le coordinate canoniche su $\mathbb{R}^2$. Dire per quali funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ il campo vettoriale

   $$v = f(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

   ha indice $I(v,(0,0))$ ben definito. Si calcoli tale indice.
2. Posto $z = x + iy$, si consideri per ogni intero $k > 0$ il campo vettoriale

   $$w_k = \mathrm{Re}(z^k)\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{Im}(z^k)\frac{\partial}{\partial y}.$$

   Utilizzando solo la definizione di indice si calcoli $I(w_k,(0,0))$.