Corso di Geometria 2 - a.a. 2012-2013

Prova scritta del 14-06-2013

Esercizio 1

Sia $M = M(n,m)$ la varietà differenziabile delle matrici reali $n \times m$, e si fissi un intero $k \geq 1$.

1. Mostrare che ogni punto del sottoinsieme $X \subset M$ formato dalle matrici $m \in M$ con minore $(m_{ij})_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq k}$ invertibile gode della proprietà di sottovarietà regolare.

2. Mostrare che il sottoinsieme $Y \subset M$ formato dalle matrici $m \in M$ di rango k è una sottovarietà regolare, di dimensione $k(n+m-k)$.

Esercizio 2

Si consideri la superficie parametrizzata $S \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^2 v), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Calcolare l'equazione del piano tangente affine $T_P(S)$ nel punto generico $P = \mathbf{x}(u,v)$.

2. Scrivere l'espressione della Prima e Seconda forma fondamentale nelle coordinate (u,v).

3. Stabilire la natura dei punti di S.

4. Posto $Q = \mathbf{x}(1,1)$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, verificare che $\mathbf{v}$ è un vettore tangente a S nel punto Q.

5. Sia σ la sezione normale di S lungo il vettore $\mathbf{v}$. Determinare una parametrizzazione per la curva σ e verificare che la curvatura k_σ di σ nel punto Q soddisfa la relazione:
$$k_\sigma(Q) = |\mathrm{II}_Q(\hat{\mathbf{v}})|,$$
dove II_Q indica la seconda forma fondamentale di S nel punto Q e $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}$.

Esercizio 3

Sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. Dimostrare che se $A \subseteq X$ è un retratto di X, allora A è connesso per archi. Dimostrare inoltre che, se A non è semplicemente connesso, allora il suo gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

2. Dire quali dei seguenti sottospazi di X sono retratti di X:

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$;
   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;
   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;
   (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 = 1\}$.