

## CORSO DI GEOMETRIA 2

### Appello del 24 settembre 2012

#### Esercizio 1

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^\infty$  e sia  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva definita da  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), f(t))$ .

- (1) Dimostrare che  $\alpha$  è una curva biregolare.
- (2) Calcolare la curvatura e la torsione di  $\alpha$  in ogni punto.
- (3) Assumendo che  $|\alpha'|$  sia una costante diversa da 1, si dica se  $\alpha(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}^3 \setminus \alpha(\mathbb{R})$  sono omotopicamente equivalenti.
- (4) Fornire un esempio in cui  $f$  non è costante e  $\alpha(\mathbb{R})$  non è semplicemente connesso.

#### Esercizio 2

Sia  $\phi: \mathbb{R}_{>0} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\phi(u, v) := (u^2, v^2, f(v))$  dove  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è un diffeomorfismo sull'immagine.

- (1) Dimostrare che  $S := \text{Im}(\phi)$  è una superficie regolare orientabile.
- (2) Dire se esiste un aperto di  $S$  localmente isometrico ad una sfera.
- (3) Dire se i punti della forma  $\phi(u, 0)$ ,  $u \in \mathbb{R}_{>0}$  sono punti ombelicali.
- (4) Dire se le curve coordinate sono linee di curvatura.

#### Esercizio 3

Sia  $S$  una superficie regolare in  $\mathbb{R}^3$  senza punti planari e con curvatura media  $H = 0$  in ogni punto. Per ogni  $p \in S$  dire quante sono le direzioni asintotiche in  $p$ .