Note di algebra multilineare

A.A. 2018/19

CAP. 0 : Algebra multilineare

0.1 Basi duali e biduale

Sia V uno spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) e denotiamo con $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ il suo duale.
Assumeremo V di dimensione finita e poniamo $n = \dim_{\mathbb{K}} V$.
Fissata una base $\{e_1 \dots e_n\}$ di V ricordiamo che ogni funzionale $\varphi \in V^*$ è univocamente determinato dai valori $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_k) \in \mathbb{K}$
Più precisamente l'applicazione

$$\begin{aligned} V^* &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \varphi &\longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \varphi(e_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è un isomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.
Osserviamo quindi che esiste un funzionale $e^i \in V^*$ tale che $e^i(e_j) = \delta_{ij}$. Inoltre i funzionali $\{e^1 \dots e^n\}$ costituiscono una base di V^*, detta base duale.

LEMMA 1 : Dato $v \in V$, $e^i(v)$ coincide con la i-esima coordinata di v rispetto alla base V.

DIM : È sufficiente mostrare che $v = \sum_{i=1}^{n} e^i(v) e_i$.
Per controllare questa identità è sufficiente controllare che $\varphi(v) = \varphi(\sum e^i(v) e_i)$ per ogni $\varphi \in V^*$. Ora l'in=

sieme dei funzionali $\varphi \in V^*$ tali per cui $\varphi(v) = \varphi(\sum e^i(v) e_i)$ é un sottospazio di V^*, per cui per verificare che l'uguaglianza é verificata per ogni φ é sufficiente controllare che sia verificata da $e^1 \dots e^n$.

Ora $e^\alpha(\sum e^i(v) e_i) = \sum e^i(v)\, e^\alpha(e_i) = \sum e^i(v)\, \delta_{\alpha i} = e^\alpha(v)$.

$\blacksquare$

Infine ricordiamo che l'omomorfismo di valutazione

$$val : V \longrightarrow V^{**}$$

definito da

$$val(v)\,(\varphi) := \varphi(v)$$

é un isomorfismo canonico.

OSS. In modo intuitivo possiamo dire che l'attributo "canonico" si riferisce al fatto che l'isomorfismo val non dipende dalla scelta di una base. Piú precisamente si noti che in realtá non si é definito un unico isomorfismo ma una famiglia di isomorfismi, uno per ogni spazio vettoriale con la proprietá aggiuntiva che se $f : V \longrightarrow W$ é un omomorfismo allora il seguente diagramma é commutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "val"'] & W \arrow[d, "val"] \\ V^{**} \arrow[r, "(f^T)^T"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

dove $f^T(\varphi) = \varphi \circ f$.

Con un linguaggio formale possiamo dire che val è una trasformazione naturale del funtore identità della categoria $Vect_{\mathbb{K}}$ dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e il funtore biduale.

0.2 Applicazioni multilineari

Siano $V_1 \dots V_k, W$ $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Una funzione

$$T: V_1 \times \dots \times V_k \longrightarrow W$$

è detta k-lineare se la restrizione di T a ciascun fattore è lineare, ovvero se $\forall i \in \{1 \dots k\}$ $\forall v_1 \in V_1, \dots, v_{i-1} \in V_{i-1}$ $v_{i+1} \in V_{i+1}, \dots, v_k \in V_k$ si ha che l'applicazione

$$V_i \ni v \longmapsto T(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots v_k) \in W$$

è lineare.

Denoteremo con $\mathcal{M}(V_1, \dots, V_k; W)$ lo spazio delle applicazioni k-lineari $V_1 \times \dots \times V_k \longrightarrow W$. Per semplicità poniamo

$$\mathcal{M}_k(V; W) = \mathcal{M}(\underbrace{V, \dots, V}_{k\text{-volte}}; W)$$

Esempio: Siano $\varphi_1 \in V_1^*, \varphi_2 \in V_2^*, \dots, \varphi_k \in V_k^*$. Poniamo

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_k : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_k (v_1 \dots v_k) = \varphi_1(v_1) \cdot \varphi_2(v_2) \cdot \dots \cdot \varphi_k(v_k).$$

Allora è di immediata verifica che $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_k \in \mathcal{M}(V_1 \dots V_k ; \mathbb{K})$

EX Dimostrare che esiste $v_1 \in V_1$ tale che

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_k (v_1 \dots v_k) = 0 \quad \forall v_2 \in V_2, \dots, v_k \in V_k$$

EX Si consideri la funzione $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}$, $\pi(X,Y) = {}^T X \cdot Y$.
Verificare che π è bilineare e utilizzando l'esercizio precedente dedurre che non esistono $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^n)^*$ tali che $\pi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$.

EX Si dimostri che un'applicazione bilineare $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è della forma $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ se e solo se la matrice associata ha rango 1.

EX Sia $L : V_1 \to W$ applicazione lineare e siano $\varphi_2 \in V_2^* \dots \varphi_k \in V_k^*$.
Si verifichi che l'applicazione

$$L \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_k : V_1 \times \dots \times V_k \longrightarrow W$$

definita da $L \otimes \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_k (v_1 \dots v_k) = \varphi_2(v_2) \cdot \dots \cdot \varphi_2(v_k) \cdot L(v_1)$ è k-lineare.

EX* Data $L \in \mathrm{Hom}(V_1, W)$ e $\varphi \in V_2^*$, verificare che esiste $\psi \in V_1^*$ e $M \in \mathrm{Hom}(V_2, W)$ t.c. $L \otimes \varphi = \psi \otimes M$.

Sullo spazio $\mathcal{M}(V_1,\dots,V_k;W)$ é definita una naturale struttura di spazio vettoriale definita da

$$(T_1+T_2)(v_1,\dots,v_k) := T(v_1,\dots,v_k)+T_2(v_1,\dots,v_k)$$
$$(\alpha T)(v_1,\dots,v_k) := \alpha\, T(v_1\dots,v_k)$$

EX : verificare che le operazioni sono ben definite e definiscono una struttura di spazio vettoriale su $\mathcal{M}(V_1,\dots,V_k;W)$

EX : Si consideri la funzione di valutazione

$$\begin{aligned} val: \mathcal{M}(V_1\dots V_k;W)\times V_1\times\dots\times V_k &\longrightarrow W \\ (T, v_1\dots v_k) &\longmapsto T(v_1,\dots v_k) \end{aligned}$$

verificare che $val \in \mathcal{M}(\mathcal{M}(V_1\dots V_k;W), V_1,\dots,V_k;W)$.

Osserviamo che dato $T\in\mathcal{M}(V_1,\dots,V_k;W)$ e fissato $v\in V_1$ l'applicazione $\iota_v T: V_2\times\dots\times V_k \longrightarrow W$ definita da

$(\iota_v T)(v_2\dots,v_k) = T(v,v_2,\dots v_k)$ é $(k-1)$-lineare.

Si noti inoltre che la funzione

$$\iota_\bullet T: V_1 \longrightarrow \mathcal{M}(V_2,\dots,V_k;W)$$

definita da $\iota_\bullet T(v) = \iota_v T$ é lineare.

EX3: Verificare la multilinearitá di $\iota_v T$ e la linearitá di $\iota_\bullet T$.

Un' osservazione molto utile é la seguente:

LEMMA 2: La mappa $\iota : \mathcal{M}(V_1 \dots V_k; W) \longrightarrow Hom(V_1; \mathcal{M}(V_2, \dots V_k; W))$ definita da $T \mapsto \iota_\cdot T$ é un isomorfismo.

DIM: L'iniettività segue facilmente dalla definizione. Dimostriamo la suriettività. Sia $\xi : V_1 \longrightarrow \mathcal{M}(V_2, \dots, V_k; W)$. Poniamo $T_\xi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \longrightarrow W$, $T_\xi(v_1, \dots, v_k) = \xi(v_1)(v_2 \dots, v_k)$.

Chiaramente si ha che fissati $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, … $v_{i-1} \in V_i$, $v_{i+1} \in V_{i+1}$ … $v_k \in V_k$ la funzione $V_i \ni v \longmapsto T_\xi(v_1, v_2, \dots v_{i-1}, v, v_{i+1} \dots v_k)$ é lineare $\forall\, i = 2 \dots k$.

Del resto fissati $v_2 \in V_2, \dots, v_k \in V_k$ la linearitá della funzione $V_1 \ni v \longmapsto T_\xi(v, v_2 \dots v_k)$ segue dalla linearitá della mappa ξ e dalla linearità della mappa di valutazione

$$\mathcal{M}(V_2 \dots V_k; W) \ni S \longmapsto S(v_2 \dots v_k) \in W.$$

Osserviamo che da definizione si ha $\iota_\cdot T = \xi$. ▨

Come conseguenza del precedente lemma abbiamo il seguente importante risultato che generalizza l'analoga proprietà delle mappe lineari.

THM 1: Siano $\mathcal{B}_1 = \{v_1^1 \dots v_{n_1}^1\}$ $\mathcal{B}_2 = \{v_1^2 \dots v_{n_2}^2\}$ …. $\mathcal{B}_k = \{v_1^k \dots v_{n_k}^k\}$ basi rispettivamente di $V_1 \dots V_k$. Allora assegnati vettori

$$w_{i_1 i_2 \dots i_k} \in W \quad \text{dove} \quad i_1 = 1 \dots n_1,\ i_2 = 1 \dots n_2,\ \dots,\ i_k = 1 \dots n_k$$

esiste un'unica $T \in \mathcal{M}(V_1 \dots V_k; W)$ tale che

$$T(v_{i_1}^1, v_{i_2}^2, \dots, v_{i_k}^k) = w_{i_1 \dots i_k}.$$

DIM: Ragioniamo per induzione su K.
Per $K=1$ $\mathcal{M}(V_1; W) = \mathrm{Hom}(V_1; W)$ e il risultato è noto.
Consideriamo ora il passo induttivo $(K-1) \Rightarrow K$.
Per ipotesi induttiva $\forall\, i = 1 \dots n_1$ esiste $\xi_i \in \mathcal{M}(V_2 \dots V_K; W)$ tale che

$$\xi_i (v^2_{i_2} \dots v^K_{i_K}) = w_{i\, i_2 \dots i_K}.$$

Osserviamo dunque che $\exists!\ \xi \in \mathrm{Hom}(V_1, \mathcal{M}(V_2 \dots V_K; W))$ t.c.
$\xi(v^1_i) = \xi_i \quad \forall\, i = 1 \dots n_1$
Consideriamo dunque $T_\xi \in \mathcal{M}(V_1 \dots V_K; W)$.
Osserviamo che

$$T_\xi (v^1_{i_1} \dots v^K_{i_K}) = \xi(v^1_{i_1})(v^2_{i_2} \dots v^K_{i_K}) = \xi_{i_1}(v^2_{i_2} \dots v^K_{i_K}) = w_{i_1 \dots i_K}$$

Ciò mostra l'esistenza di un'applicazione K-lineare con le proprietà richieste.
Circa l'unicità osserviamo che sempre per ipotesi induttiva se esiste un'altra mappa K-lineare T con le proprietà richieste, si ha che $\iota_{v^1_i} T = \xi_i = \iota_{v^1_i} T_\xi$, ma dunque le mappe lineari $\iota_\cdot T$ e $\iota_\cdot T_\xi$ coincidono sulla base $\{v^1_1 \dots v^1_{n_1}\}$ di V_1 e dunque $\iota_\cdot T \equiv \iota_\cdot T_{\xi_1} \Rightarrow T \equiv T_{\xi_1}$.

$\blacksquare$

COR. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}(V_1 \dots V_K; W) = \dim_{\mathbb{K}}(V_1) \dim_{\mathbb{K}}(V_2) \dots \dim_{\mathbb{K}}(V_K) \dim_{\mathbb{K}}(W)$
DIM: Posto $n_i = \dim_{\mathbb{K}} V_i$ si osservi che

$$\#\{(i_1 \dots i_k) \in \mathbb{N}^k \mid 1 \le i_\alpha \le n_\alpha \ \forall \alpha = 1 \dots k\} = n_1 n_2 \dots n_k := N$$

Fissate basi $\{v_1^\alpha \dots v_{n_\alpha}^\alpha\}$ di V_α per $\alpha = 1 \dots k$, ad ogni $T \in \mathcal{M}(V_1 \dots V_k ; W)$ possiamo associare N vettori di W

$$w_{i_1 \dots i_k} = T(v_{i_1}^1, \dots v_{i_k}^k) \quad \text{con} \quad 1 \le i_\alpha \le n_\alpha .$$

In tal modo definiamo una mappa

$$\mathcal{M}(V_1, \dots, V_k ; W) \longrightarrow W^N$$

Il teorema precedente ci dice che tale mappa è biunivoca. Una verifica immediata mostra che è lineare. È dunque un isomorfismo e il risultato segue.

$\blacksquare$

EX Fissati $V_1 \dots V_k$ e W dati $v_2 \in V_2 \dots v_k \in V_k$, si consideri per $T \in \mathcal{M}(V_1 \dots V_k ; W)$ la funzione lineare

$$\iota(v_2, \dots, v_k) T : V_1 \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto T(v, v_2, \dots v_k)$$

Mostrare che la mappa $V_2 \times \dots \times V_k \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_1 ; W)$ definita da $(v_2 \dots v_k) \longmapsto \iota(v_2, \dots, v_k) T$ è $(k-1)$-lineare.

Verificare che la mappa

$$\mathcal{M}(V_1, \dots, V_k, W) \longrightarrow \mathcal{M}(V_2 \dots V_k ; \mathrm{Hom}(V_1, W))$$
$$T \longmapsto \iota(\cdot, \dots, \cdot) T$$

è un isomorfismo.

EX: Fissati spazi vettoriali $V_1 \dots V_k, W$ dedurre dal precedente esercizio che $\mathcal{M}(V_1, \dots, V_k, W; \mathbb{K})$ è canonicamente isomorfo a $\mathcal{M}(V_1, \dots, V_k; W^*)$.

Utilizzando l'identificazione canonica $W \cong W^{**}$ dedurre che $\mathcal{M}(V_1, \dots, V_k; W) \cong \mathcal{M}(V_1, \dots, V_k, W^*; \mathbb{K})$ esplicitando l'isomorfismo canonico.

EX Utilizzando l'isomorfismo canonico $\mathrm{Hom}(V; W) = \mathcal{M}(V, W^*; \mathbb{R})$ dato dal precedente esercizio e l'isomorfismo $W \cong W^{**}$, dato $\varphi \in V$ e $w \in W$, l'elemento $\varphi \otimes w \in \mathcal{M}(V, W^*; \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(V, W)$.
Esplicitando gli isomorfismi sopra descritti si dimostri che considerando $\varphi \otimes w : V \longrightarrow W$ la seguente formula vale:

$$\varphi \otimes w(v) = \varphi(v)\, w.$$

EX Sia $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ la base duale della base canonica in $\mathbb{R}^n$. Verificare che ogni $T \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ si scrive in modo unico come

$$T = \sum T_{i_1 \dots i_k}\, dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k}$$

dove $T_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$ e gli indici $i_1, \dots, i_k$ variano nell'insieme $\{1 \dots n\}$
Dedurre che $\{dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_k} \mid 1 \leq i_\alpha \leq n\}$ è una base di $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n \cdot \mathbb{R})$

EX Si verifichi che se $T = \sum T_{ij} \, dx_i \otimes dx_j \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ é una forma bilineare su $\mathbb{R}^n$, allora (T_{ij}) é la classica matrice associata a T.

0.3 Funtorialità

Dati spazi vettoriali $V_1, \dots, V_k$, W e $f \in \mathrm{Hom}(W, W')$ osserviamo che $\forall \, T \in \mathcal{M}(V_1 \dots V_k; W)$ la funzione $f_* T : V_1 \times \dots \times V_k \longrightarrow W'$ definita da $f_* T(v_1, \dots, v_k) = f(T(v_1 \dots v_k))$ e k-lineare e inoltre si ha che la mappa indotta

$$f_* : \mathcal{M}(V_1, \dots, V_k; W) \longrightarrow \mathcal{M}(V_1, \dots, V_k; W')$$

è lineare.

Infine è pressoché immediato verificare che dati $f \in \mathrm{Hom}(W, W')$ e $f' \in \mathrm{Hom}(W', W'')$ si ha che

$$(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_* \, ,$$

ed

$$(id_W)_* = id_{\mathcal{M}(V_1 \dots V_k; W)} \, .$$

Possiamo dunque riassumere queste osservazioni dicendo che $\mathcal{M}(-; \cdot)$ é un funtore covariante del secondo argomento (ovvero del codominio)

EX Si verifichino in dettaglio le affermazioni precedenti.

In modo analogo fissati degli omomorfismi $g_i \in \mathrm{Hom}(V_i, V_i')$ e fissato $T \in \mathcal{M}(V_1', \dots, V_k'; W)$ la funzione $(g_1, \dots, g_k)^* T : V_1 \times \dots \times V_k \to W$ definita da

$$(g_1 \dots g_k)^* T(v_1 \dots v_k) = T(g_1 v_1, g_2 v_2, \dots, g_k v_k)$$

è K-lineare e la mappa indotta

$$(g_1 \dots g_k)^* : \mathcal{M}(V_1', \dots, V_k'; W) \longrightarrow \mathcal{M}(V_1, \dots, V_k; W)$$

è lineare.

Inoltre è semplice verificare che se $g_i : V_i \longrightarrow V_i'$ e $h_i : V_i' \longrightarrow V_i''$ allora $(h_1 \circ g_1 \dots h_k \circ g_k)^* = (g_1, \dots, g_k)^* \circ (h_1 \dots h_k)^*$.

Riassumendo il funtore $(V_1 \dots V_k) \longmapsto \mathcal{M}(V_1 \dots V_k; W)$ è un funtore controvariante.

EX: Si verifichino le affermazioni precedenti

EX Sia $f : W \longrightarrow W'$ un omomorfismo tra spazi vettoriali, e sia $f^T : (W')^* \longrightarrow W^*$ l'applicazione trasposta.

Si mostri che il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(V_1 \dots V_k; W) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{M}(V_1 \dots V_k; W') \arrow[d, "\cong"] \\
\mathcal{M}(V_1 \dots V_k, W^*; \mathbb{K}) \arrow[r, "(id, id, \dots, f^T)^*"'] & \mathcal{M}(V_1 \dots V_k (W')^*; \mathbb{K})
\end{tikzcd}$$

EX: Sia $L : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ un'applicazione lineare definita da $(L(X))_{ij} = \sum L_{ij} X_j$, $L_{ij} \in \mathbb{K}$. Fissato $T = \sum T_{i_1 \dots i_k} \, dy_{i_1} \otimes \dots \otimes dy_{i_k}$ (dove $dy_1 \dots dy_m$ è la base duale della base canonica di $\mathbb{K}^m$) verificare che $(L \dots L)^*(T) = \sum_j \tau_{j_1 \dots j_k} \, dx_{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{j_k}$ dove

$$\tau_{j_1 \dots j_k} = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1 \dots m\}^k} L_{i_1 j_1} L_{i_2 j_2} \dots L_{i_k j_k} T_{i_1 \dots i_k}$$

0.4 Prodotto tensore e proprietà universale

Ricordiamo che fissati $\varphi_1 \in V_1^*, \varphi_2 \in V_2^*, \dots, \varphi_k \in V_k^*$ abbiamo definito $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_k \in \mathcal{M}(V_1, \dots, V_k; \mathbb{K})$ ponendo

$$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_k (v_1 \dots v_k) := \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) \dots \varphi_k(v_k).$$

Utilizzando l'identificazione canonica $V_i \cong V_i^{**}$, dati $v_1 \in V_1 \dots v_k \in V_k$, possiamo reciprocamente definire $v_1 \otimes \dots \otimes v_k \in \mathcal{M}(V_1^* \dots V_k^*; \mathbb{K})$ ponendo

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k (\varphi_1, \dots, \varphi_k) := \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) \dots \varphi_k(v_k)$$

Motivati da questa definizione diamo la seguente definizione:

DEF: Siano $V_1 \dots V_k$ spazi vettoriali, allora il prodotto tensore di $V_1 \dots V_k$ è $V_1 \otimes \dots \otimes V_k := \mathcal{M}(V_1^*, \dots, V_k^*; \mathbb{K})$.

EX Verificare che il prodotto tensore di k-spazi vettoriali è un funtore covariante dalla categoria i cui oggetti sono k-uple di spazi vettoriali e le cui frecce sono k-uple di applicazioni lineari $(V_1, \dots, V_k) \xrightarrow{(f_1 \dots f_k)} (W_1 \dots W_k)$ dove $f_i : V_i \to W_i$ alla categoria degli spazi vettoriali e applicazioni lineari.

Vogliamo ora studiare le proprietà della mappa

$$V_1 \times \dots \times V_k \xrightarrow{\otimes} V_1 \otimes \dots \otimes V_k$$
$$(v_1, \dots, v_k) \longmapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_k$$

EX La mappa $\otimes$ è multilineare.

Gli elementi di $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ si chiamano tensori. Gli elementi nella immagine di $\otimes$, ovvero quelli nella forma $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$, sono detti tensori semplici.

EX* Siano $\{v_i, w_i\} \subset V_i$ vettori indipendenti. Verificare che $T = v_1 \otimes \dots \otimes v_k + w_1 \otimes \dots \otimes w_k$ NON è un tensore semplice. [SI RAGIONI PER INDUZIONE SU K]

LEMMA 3: Sia $\{v_1^1 \dots v_{n_1}^1\}$ base di V_1, $\{v_1^2 \dots v_{n_2}^2\}$ base di V_2, ... $\{v_1^k \dots v_{n_k}^k\}$ base di V_k.

Allora l'insieme

$$\mathcal{B} = \{ v_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{i_k}^k \mid 1 \leq i_1 \leq n_1, \dots, 1 \leq i_k \leq n_k \}$$

è una base di $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$

DIM Denotiamo con $\{\varphi_i^1\}_{i \leq n_1} \dots \{\varphi_i^k\}_{i \leq n_k}$ le corrispettive basi duali. Si noti che

$$v_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{i_k}^k (\varphi_{j_1}^1, \dots, \varphi_{j_k}^k) = \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_k j_k}$$

ovvero

$$v_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes v_{i_k}^k (\varphi_{j_1}^1 \dots \varphi_{j_k}^k) = \begin{cases} 1 & \text{se } i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dunque se $T := \sum_{(i_1 \dots i_k) \in \mathcal{J}} a_{i_1 \dots i_k} v_{i_1}^1 \otimes \dots v_{i_k}^k$ è una qualunque combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$ [dove si è posto per comodità $\mathcal{J} = \{(i_1 \dots i_k) \in \mathbb{N}^k \mid 1 \leq i_1 \leq n_1 \dots 1 \leq i_k \leq n_k\}$] allora si ha

$$T(\varphi_{j_1}^1 \dots \varphi_{j_k}^k) = a_{j_1 \dots j_k} \quad \forall (j_1 \dots j_k) \in \mathcal{J}$$

Ciò immediatamente mostra che $\mathcal{B}$ è un sistema di vettori linearmente indipendenti. Inoltre per il teorema 1 si ha che dato $T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_k$, esso può essere decomposto come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$ nel seguente modo

$$T = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{I}} T(\varphi^1_{i_1},\dots,\varphi^k_{i_k})\, v^1_{i_1}\otimes\dots\otimes v^k_{i_k} \qquad \blacksquare$$

OSS: Il lemma 3 stabilisce in particolare che i tensori semplici di $V_1\otimes\dots\otimes V_k$ formano un sistema di generatori di $V_1\otimes\dots\otimes V_k$.

THM 2 [proprietà universale del prodotto tensore]

Sia $T: V_1\times\dots\times V_k \longrightarrow W$ un'applicazione multilineare.
Allora esiste un'unica applicazione lineare

$$\mathcal{G}(T): V_1\otimes\dots\otimes V_k \longrightarrow W$$

che rende il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
V_1\times\dots\times V_k \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\otimes"] & W \\
V_1\otimes\dots\otimes V_k \arrow[ur, "\mathcal{G}(T)"'] &
\end{tikzcd}$$

DIM: L'unicità di $\mathcal{G}(T)$ è conseguenza dell'osservazione che la commutatività del diagramma prescrive univocamente le immagini tramite $\mathcal{G}(T)$ sui tensori semplici. Dato che quest'ultimi formano un sistema di generatori di $V_1\otimes\dots\otimes V_k$ due applicazioni lineari su $V_1\otimes\dots\otimes V_k$ che coincidono sui tensori semplici sono uguali.
Per provare l'esistenza di $\mathcal{G}(T)$, fissiamo basi $\{v^\alpha_i\}_{i\le n_\alpha}$ di V_α e consideriamo la base $\mathcal{B} = \{v^1_{i_1}\otimes\dots\otimes v^k_{i_k}\}$ di $V_1\otimes\dots\otimes V_k$.

Sia $\mathcal{G}(T): V_1 \otimes \dots \otimes V_K \to W$ l'applicazione lineare definita sulla base $\mathcal{B}$ ponendo

$$\mathcal{G}(T)(v^1_{i_1} \otimes \dots \otimes v^K_{i_K}) := T(v^1_{i_1}, \dots, v^K_{i_K})$$

Per concludere dobbiamo mostrare che $\mathcal{G}(T) \circ \otimes = T$.

Osserviamo che $\mathcal{G}(T) \circ \otimes$ e T sono entrambe applicazioni K-lineari e inoltre per definizione

$$\mathcal{G}(T) \circ \otimes (v^1_{i_1}, \dots, v^K_{i_K}) = T(v^1_{i_1}, \dots, v^K_{i_K})$$

Per il teorema 1 possiamo allora concludere che esse coincidono. $\blacksquare$

COR: L'omomorfismo naturale

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_K ; W) &\longrightarrow \mathcal{M}(V_1, \dots, V_K ; W) \\ \mathcal{G} &\longmapsto \mathcal{G} \circ \otimes \end{aligned}$$

é un isomorfismo.

COR: Sia $V_1 \times \dots \times V_K \xrightarrow{p} L$ una mappa K-lineare che gode della stessa proprietà della mappa $\otimes : V_1 \times \dots \times V_K \to V_1 \otimes \dots \otimes V_K$. Allora la mappa $\mathcal{G}(p): V_1 \otimes \dots \otimes V_K \to L$ è un isomorfismo.

OSS Questo corollario stabilisce che in qualche modo il prodotto tensore è determinato a meno di isomorfismo dalla proprietà universale

DIM: Dall'ipotesi esiste una mappa lineare $\mathcal{F}: L \to V_1 \otimes \dots \otimes V_K$ tale che il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd}
& V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "\otimes"] & \\
V_1 \otimes \dots \otimes V_k \arrow[r, "\mathcal{G}(p)"'] & L \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & V_1 \otimes \dots \otimes V_k
\end{tikzcd}$$

In particolare dalla commutatività di

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \dots \times V_k \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\otimes"] & V_1 \otimes \dots \otimes V_k \\
V_1 \otimes \dots \otimes V_k \arrow[ur, "\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(p)"'] &
\end{tikzcd}$$

si ottiene che

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(p) = \mathcal{G}(\otimes) = id_{V_1 \otimes \dots \otimes V_k}$$

In modo simile si dimostra che $\mathcal{G}(p) \circ \mathcal{F} = id_L$. ▨

COR $(V_1 \otimes \dots \otimes V_k)^*$ é canonicamente isomorfo a $V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$.

DIM: Dal primo corollario si ha che

$$(V_1 \otimes \dots \otimes V_k)^* = \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_k ; \mathbb{K}) \cong \mathcal{M}(V_1, \dots, V_k ; \mathbb{K}) = V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$$

EX Dati $\varphi_1 \in V_1^*, \dots, \varphi_k \in V_k^*$ si consideri $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_k$ come un funzionale lineare su $V_1 \otimes \dots \otimes V_k$ attraverso l'isomorfismo descritto sopra. Si determini $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_k (v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$.

COR Data una mappa $(k+1)$-lineare

$$V_1 \times \dots \times V_k \times W \xrightarrow{T} U$$

si dimostri che esiste un'unica applicazione bilineare

$$\mathcal{B}(T) : V_1 \otimes \dots \otimes V_k \times W \longrightarrow U$$

che rende il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_k \times W \arrow[r, "T"] \arrow[d, "(\otimes, id)"'] & U \\ V_1 \otimes \dots \otimes V_k \times W \arrow[ur, "\mathcal{B}(T)"'] & \end{tikzcd}$$

dove $(\otimes, id)(v_1 \dots v_k\ w) = (v_1 \otimes \dots \otimes v_k, w)$

DIM: Per ogni $w \in W$ la forma $\iota_w T : V_1 \times \dots \times V_k \longrightarrow U$ definita da $(\iota_w T)(v_1 \dots v_k) = T(v_1 \dots v_k, w)$ è k-lineare e dunque $\exists$ $\mathcal{G}(\iota_w T) : V_1 \otimes \dots \otimes V_k \longrightarrow U$ lineare tale che

$$T(v_1 \dots v_k, w) = \mathcal{G}(\iota_w T)(v_1 \otimes \dots \otimes v_k).$$

Si osservi che $\iota_{(w_1+w_2)} T = \iota_{w_1} T + \iota_{w_2} T$, da cui $\mathcal{G}(\iota_{(w_1+w_2)} T) = \mathcal{G}(\iota_{w_1} T) + \mathcal{G}(\iota_{w_2} T)$. Segue che la funzione $\mathcal{B}(T) : V_1 \otimes \dots \otimes V_k \times W \longrightarrow U$ definita da

$$\mathcal{B}(T)(\xi, w) = \mathcal{G}(\iota_w T)(\xi)$$

è bilineare e chiaramente si ha

$$\mathcal{B}(T)(v_1 \otimes \dots \otimes v_k, w) = \mathcal{G}(\iota_w T)(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = T(v_1 \dots v_k, w).$$

COR. Dati 3 spazi vettoriali V, U, W esiste un unico isomorfismo $(V \otimes U) \otimes W \xrightarrow{\Phi} V \otimes U \otimes W$ tale che $\Phi((v \otimes u) \otimes w) = v \otimes u \otimes w$.

DIM Applicando il precedente corollario alla mappa trilineare $V \times U \times W \xrightarrow{\otimes} V \otimes U \otimes W$, ricaviamo che esiste una mappa bilineare $\mathcal{B}(\otimes) : V \otimes U \times W \longrightarrow V \otimes U \otimes W$ t.c.

$$\mathcal{B}(\otimes)(v \otimes u, w) = v \otimes u \otimes w \quad \forall v \in V,\ u \in U,\ w \in W$$

Utilizzando la proprietà universale del prodotto tensore a $V \otimes U$ e W si ricava che esiste un omomorfismo

$\Phi : (V\otimes U)\otimes W \longrightarrow V\otimes U\otimes W$

t.c. $\Phi((v\otimes u)\otimes w) = \mathcal{B}(\otimes)(v\otimes u, w) = v\otimes u\otimes w$.

Il fatto che Φ sia un isomorfismo è lasciato per esercizio [si consiglia di fissare basi di V, U, W, costruire basi di $(V\otimes U)\otimes W$ e $V\otimes U\otimes W$ ....].

EX Si dimostri che esiste un unico isomorfismo $*: V\otimes W \longrightarrow W\otimes V$ tale che $* v\otimes w = w\otimes v$. Si verifichi che se $T\in V\otimes W$, $\varphi\in V^*$, $\psi\in W^*$ allora $*T(\psi,\varphi) = T(\varphi,\psi)$

EX Con riferimento al precedente corollario detto $\Phi : (V\otimes U)\otimes W \longrightarrow V\otimes U\otimes W$ l'isomorfismo canonico, dato $T\in V\otimes U$ e $w\in W$, e fissati $\varphi\in V^*$, si dimostri che

$\Phi(T\otimes w)(\varphi,\psi,\zeta) = T(\varphi,\psi)\zeta(w)$ $\forall\, \varphi\in V^*, \psi\in U^*, \zeta\in W^*$

[Si dimostri che esiste $\Xi : (V\otimes U)\otimes W \longrightarrow V\otimes U\otimes W$ lineare t.c. $\Xi(T\otimes w)(\varphi,\psi,\zeta) = T(\varphi,\psi)\zeta(w)$. Verificare infine che $\Xi((v\otimes u)\otimes w) = v\otimes u\otimes w$ e concludere].

EX Dati spazi vettoriali $V_1 \ldots V_K$ e $1\leq h\leq K-1$ dimostrare che esiste un unico omomorfismo

$\Phi_h : (V_1\otimes\ldots\otimes V_h)\otimes(V_{h+1}\ldots V_K) \longrightarrow V_1\otimes\ldots\otimes V_K$

t.c. $\Phi_h((v_1\otimes\ldots\otimes v_h)\otimes(v_{h+1}\otimes\ldots\otimes v_K)) = v_1\otimes v_2\otimes\ldots\otimes v_K$ $\forall\, v_i\in V_i$.

Mostrare inoltre che

1) Φ_h è un isomorfismo

2) $\forall\, T\in V_1\otimes\ldots\otimes V_h$, $\forall\, S\in V_{h+1}\otimes\ldots\otimes V_K$ si ha

$$\Phi_h(T\otimes S)(v_1 \dots v_k) = T(v_1 \dots v_h)\, S(v_{h+1} \dots v_k).$$

EX: Siano $f: V \to V'$, $g: U \to U'$, $h: W \to W'$ mappe lineari, e siano $(f,g)_*: V\otimes U \to V'\otimes U'$, $(f,g,h)_*: V\otimes U\otimes W \to V'\otimes U'\otimes W'$, $((f,g)_*,h)_*: (V\otimes U)\otimes W \to (V'\otimes U')\otimes W'$ le mappe indotte sui prodotti tensori. Si dimostri che il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd}
(V\otimes U)\otimes W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "((f,g)_*,h)_*"'] & V\otimes U\otimes W \arrow[d, "(f,g,h)_*"] \\
(V'\otimes U')\otimes W' \arrow[r, "\Phi'"] & V'\otimes U'\otimes W'
\end{tikzcd}$$

0.5 Algebra tensoriale

Nella sezione precedente abbiamo dimostrato che esiste un'identificazione naturale tra $(V_1\otimes\dots\otimes V_h)\otimes(V_{h+1}\otimes\dots\otimes V_k)$ e $V_1\otimes\dots\otimes V_k$.

Da ora in poi utilizzeremo sempre e implicitamente questa identificazione.

Ciò porta a definire un' operazione bilineare sui tensori

$$\begin{aligned}
\otimes: V_1\otimes\dots\otimes V_h \times V_{h+1}\otimes\dots\otimes V_k &\longrightarrow V_1\otimes\dots\otimes V_k \\
(T, S) &\longmapsto T\otimes S
\end{aligned}$$

(dove si osservi che l'elemento $T\otimes S$ é in effetti definito come elemento di $(V_1\otimes\dots\otimes V_h)\otimes(V_{h+1}\otimes\dots\otimes V_k)$ e dunque nella definizione si sta facendo implicitamente uso dell'identificazione sopra)

Da quanto visto si ha una doppia possibile caratterizzazione di questa operazione:

1) da una parte é l'unica operazione bilineare che sui tensori semplici é data dalla relazione

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_h) \otimes (v_{h+1} \dots \otimes v_k) = v_1 \otimes \dots \dots \otimes v_k$$

2) piú concretamente é data dalla formula

$$(T \otimes S)(\varphi_1 \dots \varphi_h, \varphi_{h+1} \dots \varphi_k) = T(\varphi_1 \dots \varphi_h) S(\varphi_{h+1} \dots \varphi_k).$$

Dimostriamo ora una proprietà importante di questa operazione.

LEMMA: Il prodotto tra tensori é associativo, ovvero se $T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_{K_1}$, $S \in V_{K_1+1} \otimes \dots \otimes V_{K_2}$ $R \in V_{K_2+1} \otimes \dots \otimes V_{K_3}$ allora

$$(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R).$$

La formula puó essere direttamente verificata utilizzando la caratterizzazione 2 del prodotto. Proponiamo una dimostrazio_ne alternativa che fa uso della caratterizzazione 1. Ciò perché in seguito utilizzeremo un argomento simile in una situazione simile dove però la caratterizzazione diretta sará più complicata

DIM: Si osservi che le mappe

$$(T, S, R) \mapsto (T \otimes S) \otimes R$$

$$(T, S, R) \mapsto T \otimes (S \otimes R)$$

sono entrambe trilineari e dunque per verificare che coincidano è sufficiente controllarlo sui vettori semplici, ma se $T = v_1 \otimes \dots \otimes v_{k_1}$ $S = v_{k_1+1} \otimes \dots \otimes v_{k_2}$ $R = v_{k_2+1} \otimes \dots \otimes v_{k_3}$ allora

$$(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R) = v_1 \otimes \dots \otimes v_{k_1} \otimes v_{k_1+1} \otimes \dots \otimes v_{k_2} \otimes v_{k_2+1} \otimes \dots \otimes v_{k_3}$$

$\blacksquare$

Ricordiamo la seguente nozione

DEF Un'algebra graduata è un'algebra A provvista di una decomposizione in sottospazi $A = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} A_k$ tali che $A_k \cdot A_h \subseteq A_{k+h}$.

Dato uno spazio vettoriale V denotiamo con $V^{\otimes k} := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-volte}}$ osserviamo che l'operazione prodotto tensore è una mappa bilineare $\otimes : V^{\otimes k} \times V^{\otimes h} \longrightarrow V^{\otimes (k+h)}$

Posto $\otimes V = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} V^{\otimes k}$ (dove si intende $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$) possiamo estendere in modo unico il prodotto tensore ad un'operazione bilineare su $\otimes V$.

Non è difficile mostrare che $\otimes V$ munito di tale operazione è una $\mathbb{K}$-algebra (associativa ma non commutativa) graduata.

Tale alegra è detta algebra tensoriale di V.

EX Verificare in dettaglio che $(\otimes V, +, \otimes, 1)$ verifica gli assiomi di $\mathbb{K}$-algebra.

0.6 Prodotto tensore e funtorialitá

In questa sezione studieremo le proprietá funtoriali del prodotto tra tensori.

Partiamo con il seguente risultato:

PROP Se $f_i : V_i \to V_i'$ sono omomorfismi tra spazi vettoriali per $i=1 \dots k$ e $T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_h$ e $S \in V_{h+1} \otimes \dots \otimes V_k$ per qualche $1 \leq h \leq k-1$ allora

$$(f_1, \dots, f_h)_* T \otimes (f_{h+1} \dots f_k)_* S = (f_1 \dots f_k)_* (T \otimes S)$$

DIM: Si osservi che la formula è vera se T e S sono tensori semplici. Per verificarla in generale basta osservare che le corrispondenze

$$(T, S) \mapsto (f_1 \dots f_h)_* T \otimes (f_{h+1} \dots f_k)_* S$$
$$(T, S) \mapsto (f_1 \dots f_k)_* (T \otimes S)$$

Sono entrambe bilineari e dunque se coincidono sui tensori semplici coincidono ovunque.

EX Si dia una dimostrazione alternativa di questo fatto basata sulla verifica esplicita.

Ricordiamo ora che dati due spazi vettoriali V, W esiste un isomorfismo canonico $\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathcal{M}(V, W^*; \mathbb{K}) = V^* \otimes W$ dato da $f \mapsto T_f$ dove $T_f(v, \psi) = \psi(f(v))$ $\forall v \in V,\ \psi \in W^*$.

Utilizzando tale isomorfismo abbiamo

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(V_1\otimes\dots\otimes V_k, V_1'\otimes\dots\otimes V_k') &\cong (V_1\otimes\dots\otimes V_k)^*\otimes(V_1'\otimes\dots\otimes V_k')\\ &\cong V_1^*\otimes\dots\otimes V_k^*\otimes V_1'\otimes\dots\otimes V_k'\\ &\cong V_1^*\otimes V_1'\otimes V_2^*\otimes V_2'\otimes\dots V_k^*\otimes V_k'\\ &\cong (V_1^*\otimes V_1')\otimes\dots\otimes(V_k^*\otimes V_k')\\ &\cong \mathrm{Hom}(V_1,V_1')\otimes\dots\otimes\mathrm{Hom}(V_k,V_k').\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato gli isomorfismi canonici studiati in 0.4. Osserviamo ora che se $f_i \in \mathrm{Hom}(V_i, V_i')$ si ha che $(f_1 \dots f_k)_* \in \mathrm{Hom}(V_1\otimes\dots\otimes V_k, V_1'\otimes\dots\otimes V_k')$ mentre $f_1\otimes\dots\otimes f_k \in \bigotimes_{i=1}^{k}\mathrm{Hom}(V_i,V_i')$

Abbiamo il seguente risultato

LEMMA: $(f_1\dots f_k)_* = f_1\otimes\dots\otimes f_k$ attraverso l'isomorfismo canonico descritto sopra.

DIM: Se consideriamo f_i come elemento di $V_i^*\otimes V_i'$, ovvero come applicazione bilineare $V_i\times(V_i')^*\longrightarrow\mathbb{K}$, essa corrisponde alla mappa bilineare $T_{f_i}: (v_i, \psi_i) = \psi_i(f_i(v_i))$

Dunque se consideriamo $f_1\otimes\dots\otimes f_k$ come una mappa $2k$ lineare
$T = T_{f_1}\otimes\dots\otimes T_{f_k} : V_1\times\dots\times V_k\times(V_1')^*\times\dots\times(V_k')^*\longrightarrow\mathbb{K}$

essa soddisfa la formula

$$T(v_1\dots v_k, \psi_1\dots\psi_k) = \psi_1(f_1(v_1))\psi_2(f_2(v_2))\dots\psi_k(f_k(v_k)).$$

Del resto se consideriamo T come un'applicazione bilineare
$T: (V_1\otimes\dots\otimes V_k)\times((V_1')^*\otimes\dots\otimes(V_k')^*)\longrightarrow\mathbb{K}$ abbiamo

$$T(v_1\otimes\dots\otimes v_k, \psi_1\otimes\dots\otimes\psi_k) = \psi_1(f_1(v_1))\psi_2(f_2(v_2))\dots\psi_k(f_k(v_k))$$

D'altra parte se consideriamo $(f_1 \dots f_k)_*$ come un'applicazione bilineare $S : (V_1 \otimes \dots \otimes V_k) \times (V_1' \otimes \dots \otimes V_k')^* \to \mathbb{K}$ si ha

$$S(\xi \otimes \eta) = \eta((f_1 \dots f_k)_*(\xi)) \quad \forall \xi \in V_1 \otimes \dots \otimes V_k, \ \eta \in (V_1' \otimes \dots \otimes V_k')^*.$$

Ricordandoci che $\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_k$ può essere considerato un funzionale su $V_1' \otimes \dots \otimes V_k'$ (attraverso l'isomorfismo $(V_1' \otimes \dots \otimes V_k')^* = (V_1')^* \otimes \dots \otimes (V_k')^*$) in modo che sui tensori semplici si abbia $\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_k (v_1' \otimes \dots \otimes v_k') = \psi_1(v_1') \dots \psi_k(v_k')$, allora abbiamo

$$\begin{aligned} S(v_1 \otimes \dots \otimes v_k, \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_k) &= \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_k ((f_1 \dots f_k)_* (v_1 \otimes \dots \otimes v_k)) = \\ &= \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_k (f_1(v_1) \otimes \dots \otimes f_k(v_k)) = \\ &= \psi_1(f_1(v_1)) \dots \psi_k(f_k(v_k)) \end{aligned}$$

Dalle precedenti espressioni risulta che $f_1 \otimes \dots \otimes f_k$ e $(f_1, \dots, f_k)_*$, considerati come forme bilineari $(V_1 \otimes \dots \otimes V_k) \times (V_1'^* \otimes \dots \otimes V_k'^*) \to \mathbb{K}$ attraverso gli isomorfismi canonici

$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_k, V_1' \otimes \dots \otimes V_k') \cong (V_1 \otimes \dots \otimes V_k) \otimes ((V_1')^* \otimes \dots \otimes (V_k')^*) \cong$$
$$\mathrm{Hom}(V_1, V_1') \otimes \dots \otimes \mathrm{Hom}(V_k \otimes V_k'),$$

coincidono sui tensori semplici e dunque sono uguali.

$\blacksquare$

Da ora in poi considereremo sempre implicitamente l'isomorfismo $\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_k, V_1' \otimes \dots \otimes V_k') = \mathrm{Hom}(V_1, V_1') \otimes \dots \otimes \mathrm{Hom}(V_2, V_2')$ e dati $f_i : V_i \to V_i'$ utilizzeremo la notazione $f_1 \otimes \dots \otimes f_k$ per indicare la mappa indotta $f_1 \otimes \dots \otimes f_k : V_1 \otimes \dots \otimes V_k \to V_1' \otimes \dots \otimes V_k'$.

In particolare se $f \in \mathrm{Hom}(V;V)$ indicheremo con

$$f^{\otimes k} = \underbrace{f \otimes \dots \otimes f}_{k\text{-volte}} : V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$$

EX Sia $f: V \to V$ un endomorfismo di V e sia $\{v_i\}$ una base di V costituita da autovettori, di modo che $f(v_i) = \lambda_i$.
Si dimostri che $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k}$ é autovettore per $f^{\otimes k}$ e se ne calcoli l'autovalore corrispondente.
Si discuta se in queste ipotesi $f^{\otimes k}$ é diagonalizzabile.

EX Sia $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$ e $g \in \mathrm{Hom}(W,W)$. Si consideri $f \otimes g : V \otimes W \to V \otimes W$. Si dimostri che se f e g sono diagonalizzabili $f \otimes g$ lo é. In questo caso si dimostri che

$$\det(f \otimes g) = (\det f)^{\dim W} (\det g)^{\dim V}$$

EX* Sia $f \in \mathrm{Hom}(V;V)$ un endomorfismo diagonalizzabile.
Dimostrare che $(\det f^{\otimes k}) = (\det f)^N$ con $N = k n^{k-1}$
Assumendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si verifichi che tale formula vale senza l'ipotesi che f sia diagonalizzabile. Infine si discuta il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

EX: Fissati $V_1 \dots V_k$ e W spazi vettoriali si dimostri che $\mathcal{M}(V_1^* \dots V_k^*; W)$ é canonicamente isomorfo a $V_1 \otimes \dots \otimes V_k \otimes W$.
Siano $V_1' \dots V_k'$ altri spazi vettoriali, si utilizzi tale isomorfismo per dimostrare che $\exists$ isomorfismo canonico tra

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{M}(V_1^*, \dots, V_k^*; W), \mathcal{M}((V_1')^*, \dots, (V_k')^*; W)) \quad e$$

$$\mathrm{Hom}(V_1, V_1') \otimes \dots \otimes \mathrm{Hom}(V_k, V_k') \otimes \mathrm{Hom}(W, W).$$

0.7 L'azione del gruppo simmetrico

Fissiamo uno spazio vettoriale V e denotiamo con S_k il gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{1,2,\dots,k\}$. Data $\tau \in S_k$ e un'applicazione k-lineare $T:(V^*)^k \longrightarrow W$ (ovvero $T \in V^{\otimes k} \otimes W$), consideriamo l'applicazione k-lineare definita da

$$T_\tau : (V^*)^k \longrightarrow W \quad , \quad T_\tau(\varphi_1,\dots,\varphi_k) = T(\varphi_{\tau^{-1}(1)},\dots,\varphi_{\tau^{-1}(k)})$$

EX: Si verifichi che $T_{\tau\circ\sigma} = (T_\sigma)_\tau \quad \forall\, \sigma,\tau \in S_k$.

Si deduca che ponendo $\tau \cdot T := T_\tau$ si definisce un'azione sinistra di S_k su $V^{\otimes k}$

EX: (Naturalità dell'azione) Sia $f: V \to V'$ e $f: V^{\otimes k} \otimes W \to (V')^{\otimes k} \otimes W$ la mappa indotta. Si dimostri che l'azione di S_k commuta con $f^{\otimes k}$, ovvero che $f^{\otimes k}(T_\tau) = (f^{\otimes k} T)_\tau \quad \forall\, T \in V^{\otimes k} \otimes W,\ \tau \in S_k$.

EX: Sia $T = v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ un tensore semplice di $V^{\otimes k}$, mostrare che $T_\tau = v_{\tau(1)} \otimes \dots \otimes v_{\tau(k)}$.

EX*: Si verifichi che la mappa $V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}$, $T \mapsto T_\tau$ è un endomorfismo lineare. Si dimostri che se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gli autovalori di tale endomorfismo sono radici d-esime dell'unità con $d = \operatorname{ord}(\tau)$.

EX: Sia τ il ciclo di permutazioni $(1 \dots d)$ con $d \leq k \leq n$.
Fissati $\{v_1 \dots v_k\}$ indipendenti sia $T_0 = v_1 \otimes \dots \otimes v_k$ e sia $T = \sum_{h=0}^{d-1} e^{\frac{2\pi i h}{d}} (T_0)_{\tau^h}$. Verificare che $T_\tau = e^{\frac{-2\pi i}{d}} T$.

Dimostrare che $T \neq 0$. (In questo esercizio $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

EX** Dimostrare che l'endomorfismo $T \mapsto T_\tau$ é diagonalizzabile, per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Un tensore T è detto τ-simmetrico (risp. τ-alterno) se $T_\tau = T$ (risp. $T_\tau = \varepsilon(\tau) T$, dove $\varepsilon(\tau)$ è il segno di τ)
Osserviamo che se τ é una permutazione pari le due nozioni (τ-simmetrico e τ-alterno) coincidono.
Diciamo che un tensore T è (totalmente) simmetrico se T é τ-simmetrico $\forall \tau \in S_k$, ovvero

$$T(\varphi_{\tau(1)}, \dots, \varphi_{\tau(k)}) = T(\varphi_1 \dots \varphi_k) \quad \forall \varphi_1 \dots \varphi_k \in V^*, \forall \tau \in S_k$$

In modo analogo definiamo T alterno se T é τ-alterno $\forall \tau \in S_k$
ovvero

$$T(\varphi_{\tau(1)}, \dots, \varphi_{\tau(k)}) = \varepsilon(\tau)\, T(\varphi_1 \dots \varphi_k).\ \forall \varphi_1 \dots \varphi_k \in V^*, \forall \tau \in S_k.$$

EX: Sia $D: \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_{n\text{-volte}} \longrightarrow \mathbb{K}$ definita da

$$D(X_1, \dots, X_n) = \det[X_1 | X_2 | \dots | X_n],$$

verificare che D é una applicazione n-lineare alterna.

EX: Dimostrare che T è simmetrica/alterna se e solo se è τ-simmetrica/τ-alterna $\forall$ trasposizione τ.

EX: Dimostrare che T è alterna se e solo se vale che $T(\varphi_1,\dots,\varphi_k)=0$ ogni volta che $\varphi_i=\varphi_j$ per qualche $i\neq j$.

EX: Sia $f: V \to W$ mappa lineare. Verificare che se T è simmetrico/alterno allora $f^{\otimes k} T$ è simmetrico/alterno.

EX Esibire un esempio di k-tensore semplice simmetrico e dimostrare che non esistono k-tensori semplici alterni non nulli.

Denoteremo con $\mathcal{A}_k(V;W)$ e $\mathcal{S}_k(V;W)$ i sottospazi di $\mathcal{M}_k(V;W)$ formati da tensori rispettivamente alterni e simmetrici.
In particolare poniamo $\Lambda^k V := \mathcal{A}_k(V^*;W) \subseteq V^{\otimes k}$ e $\mathrm{Sym}^k(V) = \mathcal{S}_k(V^*;W)$.
Ci occuperemo ora di studiare la dimensione di questi spazi.

Un'osservazione semplice ma densa di conseguenze è la seguente

LEMMA Sia $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ una base di V^*. Allora $T \in V^{\otimes k} \otimes W$ è simmetrico/alterno se e solo se

$$T(\varphi_{i_{\tau(1)}}, \dots, \varphi_{i_{\tau(k)}}) = T(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}) \,/$$
$$T(\varphi_{i_{\tau(1)}}, \dots, \varphi_{i_{\tau(k)}}) = \varepsilon(\tau)\, T(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k})$$

$\forall (i_1, \dots, i_k) \in \{1 \dots n\}^k$.

OSS: Il senso di questo lemma è che per controllare che un tensore sia simmetrico è sufficiente verificarlo su una base.

DIM: Un'implicazione ($\Rightarrow$) è ovvia.

Dimostriamo allora l'altra implicazione ($\Leftarrow$).

Osserviamo che

$$T_\tau(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}) = T(\varphi_{i_{\tau^{-1}(1)}}, \dots, \varphi_{i_{\tau^{-1}(k)}})$$

dunque se vale l'ipotesi si ha che

$$T_\tau(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}) = T(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}) \;/\; T_\tau(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}) = \varepsilon(\tau)\, T(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k})$$

$\forall (i_1 \dots i_k) \in \{1 \dots n\}^k$.

Ma allora per il teorema 1 $T_\tau = T$ / $T_\tau = \varepsilon(\tau) T$ e concludiamo

EX: Sia $\mathcal{I}_R(n,k) = \{ (i_1 \dots i_k) \in \{1 \dots n\}^k \mid i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \}$ e
$\mathcal{I}(n,k) = \{ (i_1 \dots i_k) \in \{1 \dots n\}^k \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k \}$.

Si consideri azione di S_k su $\{1 \quad n\}^k$ data da

$$\tau \cdot (i_1, \dots, i_k) = (i_{\tau^{-1}(1)} \dots, i_{\tau^{-1}(k)})$$

Verificare che ogni orbita di tale azione interseca $\mathcal{I}_R$ in esattamente un elemento

EX Con le notazioni dell'esercizio precedente si dimostri che

(a) $\mathcal{I}(n,k) = \emptyset$ se $k > n$ e $\# \mathcal{I}(n,k) = \binom{n}{k}$ altrimenti

(b) $\# \mathcal{I}_R(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$

[sugg.: si costruisca biezione tra $\mathcal{I}_R(n,k)$ e $\mathcal{I}(n+k-1, k)$].

THM 3: Sia $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ una base di V^*. Fissato k, sia $\mathcal{I} = \mathcal{I}(n,k)$ come nei precedenti esercizi e si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^{\mathcal{I}} = \{(X_I)_{I\in\mathcal{I}} \mid X_I \in \mathbb{K}\}$. Allora l'applicazione lineare

$$\mathcal{A}_k(V^*;W) \longrightarrow W^{\mathcal{I}}$$
$$T \longmapsto (T(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}))_{\{i_1<\dots<i_k\}\in\mathcal{I}}$$

è un isomorfismo.

OSS: Mentre il teorema 1 asserisce che un generico tensore è determinato una volta che si conoscono le immagini di tutte le possibili sequenze di k elementi di una base, il teorema 3 implica che un tensore alterno è determinato dalle immagini delle sequenze strettamente crescenti di k elementi di una base.

EX: Se $k>n$ $\mathcal{I}=\phi$ e in questo caso il teorema va inteso che $\Lambda^k V = \{0\}$. Lo studente dimostri questo fatto.

DIM THM 3: Iniziamo con il dimostrare l'iniettività della applicazione considerata. Sia $T \in \Lambda^k V$ e assumiamo che $T(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}) = 0 \ \forall \ i_1<\dots<i_k$. Fissato ora una sequenza non necessariamente ordinata $(j_1 \dots j_k) \in \{1 \dots n\}^k$, vogliamo dimostrare che $T(\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_k}) = 0$. Fatto ciò il teorema 1 implica $T=0$.

Distinguiamo due casi:

(a) nella sequenza $j_1 \dots j_k$ c'è un indice ripetuto: ma allora dato che T è alterno $T(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_k}) = 0$.

(b) gli indici $j_1 \dots j_k$ sono tutti distinti. Ma allora $\exists\, \tau \in S_k$ t.c. $\tau \cdot (j_1 \dots j_k) = (i_1 = \tau^{-1}(j_1) < i_2 = \tau^{-1}(j_2) < \dots < i_k = \tau^{-1}(j_k)) \in \mathcal{I}$

In tal caso utilizzando il fatto che T sia alterno abbiamo

$$T(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_k}) = \varepsilon(\tau)\, T_\tau(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_k}) = \varepsilon(\tau)\, T(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}) = 0.$$

Ciò conclude la dimostrazione dell'iniettività.

Dimostriamo ora la suriettività. Fissato $X = (x_I)_{I \in \mathcal{I}} \in W^{\mathcal{I}}$ vogliamo costruire $T \in \Lambda^k V$ t.c. $T(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}) = x_I \quad \forall I = (i_1 \dots i_k) \in \mathcal{I}$.

Dato $J = (j_1 \dots j_k) \in \{1 \dots n\}^k$ come prima distinguiamo due casi

(a) se in J compare un indice ripetuto poniamo $y_J = 0$

(b) se gli indici nella successione $j_1 \dots j_k$ sono tutti distinti $\exists!$ $\tau \in S_k$ t.c. $\tau \cdot J = (i_1 = j_{\tau^{-1}(1)} < i_2 = j_{\tau^{-1}(2)} < \dots < i_k = j_{\tau^{-1}(k)})$

[Se $j_{\alpha_1} = \min\{j_\beta\}$ si definisce $\tau^{-1}(1) = \alpha_1$, se $j_{\alpha_2} = \min\{j_\beta \mid \beta \neq \alpha_1\}$ $\tau^{-1}(2) = \alpha_2 \dots$]

Dunque si pone $y_J = \varepsilon(\tau)\, x_J$

Si osservi che se $J \in \mathcal{I}$ $\tau = id$ e $y_J = x_J$.

Del resto se $J' = \sigma \cdot J$ e se $\tau \cdot J =: I \in \mathcal{I}$ allora $\tau\sigma^{-1} J' = \tau J = I \in \mathcal{I}$ e quindi $y_{J'} = \varepsilon(\tau\sigma^{-1})\, x_I = \varepsilon(\sigma)\, y_J$.

Da questa condizione, fissato $T \in V^{\otimes k}$ t.c.

$$T(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_k}) = y_J \quad \forall \; J = (j_1, \dots, j_k) \in \{1 \dots n\}^k$$

si ha che T soddisfa la condizione del lemma, ovvero

$$T(\varphi_{j_{\tau(1)}} \dots \varphi_{j_{\tau(k)}}) = \varepsilon(\tau)\, T(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_k}) \quad \forall \; (j_1 \dots j_k) \in \{1 \dots n\}^k, \forall \tau \in S_k.$$

Segue che $T \in \Lambda^k V$ e inoltre $\forall \; I = (i_1 < \dots < i_k) \in \mathcal{I}$ si ha
$T(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k}) = y_I = x_I$.
Ciò mostra la suriettività.

$\blacksquare$

COR: $\forall \; k \leq n \quad \dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$, $\dim \mathcal{A}_k(V; W) = \binom{n}{k} \dim W$

EX Fissata una base $\varphi_1 \dots \varphi_n \in V^*$ si dimostri che l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^k V &\longrightarrow \mathbb{K}^{\mathcal{J}_k} \\ T &\longmapsto \left(T(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})\right)_{\{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k\} \in \mathcal{J}_k} \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Dedurre che

$$\dim \mathrm{Sym}^k V = \binom{n+k-1}{k}.$$

EX Dimostrare che $\mathrm{Sym}^k V \cap \Lambda^k V = \{0\}$ e verificare che $V^{\otimes k} = \mathrm{Sym}^k V \oplus \Lambda^k V$ se e solo se $k = 2$.

EX Dimostrare che l'isomorfismo canonico $\mathcal{M}_k(V^*; W) \cong V^{\otimes k} \otimes W$ si restringe ad un isomorfismo tra $\mathcal{A}_k(V^*; W)$ e $\Lambda^k V \otimes W$.

0.8 Alternatore e prodotto "wedge"

Consideriamo l'applicazione lineare

$$\mathcal{A} : V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes k}$$

definita nel seguente modo

$$\mathcal{A}(T) = \sum_{\tau \in S_k} \varepsilon(\tau)\, T_\tau$$

É immediato verificare che

(1) $\mathcal{A}(T) = k!\, T$ se $T \in \Lambda^k V$

(2) $\mathcal{A}(T) \in \Lambda^k V \quad \forall\, T \in V^{\otimes k}$

Da (1) + (2) segue che

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{A} = k!\, \mathcal{A}$$

L'operatore $\mathcal{A}$ é detto alternatore. Esso puó essere considerato (a meno di multipli) un operatore di proiezione su $\Lambda^k V$.
In particolare $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ é un complementare di $\Lambda^k V$ in $V^{\otimes k}$.

EX: Si verifichino (1) e (2).

EX: Sia τ una trasposizione e sia T τ-simmetrico. Si dimostri che $\mathcal{A}(T) = 0$.
[sugg.: si osservi che $T_\alpha = T_{\alpha\tau}$. Sia $\{\alpha_1 \ldots \alpha_N\}$ una famiglia di rappresentanti per $S_k/\langle\tau\rangle$. Allora
$$\mathcal{A}(T) = \sum_{i=1}^{N} \left(\varepsilon(\alpha_i)\, T_{\alpha_i} + \varepsilon(\alpha_i \tau)\, T_{\alpha_i \tau} \right) \ldots]$$

EX: Dimostrare che $\mathcal{A}(T_\tau) = \varepsilon(\tau)\,\mathcal{A}(T) \quad \forall\, T \in V^{\otimes k}$

Dati $v_1 \dots v_k \in V$ poniamo

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = \mathcal{A}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)$$

tale tensore è detto prodotto wedge di $v_1 \dots v_k$.

EX: Dimostrare che

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k (\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \det A$$

dove A è la matrice $k \times k$ con $A_{ij} = \varphi_i(v_j)$

EX Sia $\{v_1 \dots v_n\}$ base di V e $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ base duale di V^*.
$\forall\, I = (i_1 < \dots < i_k) \in \mathcal{I}(n,k)$ si ponga $v_I = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$.
Si verifichi che $\forall\, I' = (i_1' < \dots < i_k') \in \mathcal{I}(n,k)$ si ha che

$$v_I(\varphi_{i_1'}, \dots, \varphi_{i_k'}) = \begin{cases} 1 & \text{se } I = I' \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dedurre dal teorema 3 che $\{v_I \mid I \in \mathcal{I}(n,k)\}$ è una base di $\Lambda^k V$.

EX: Dati $v_1 \dots v_k \in V$ dimostrare che $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$ se e solo se $\{v_1 \dots v_k\}$ sono indipendenti.

EX Dimostrare che se $f: V \to W$ allora

$$\mathcal{A}(f^{\otimes k}(T)) = f^{\otimes k} \mathcal{A}(T)$$

per ogni $T \in \Lambda^k V$.

0.9 Prodotto esterno e proprietà universali

Fissato uno spazio vettoriale V consideriamo la funzione

$$\wedge : V^K \longrightarrow \Lambda^K V$$
$$(v_1 \dots v_K) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_K$$

LEMMA: La mappa $\wedge$ è K-lineare alterna.

DIM: Osserviamo che $\wedge = A \circ \otimes$. Essendo $\otimes$ K-lineare e A lineare deduciamo che $\wedge$ è K-lineare.

Osserviamo inoltre che

$$v_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge v_{\tau(K)} = A(v_{\tau(1)} \otimes \dots \otimes v_{\tau(K)}) =$$
$$= A((v_1 \otimes \dots \otimes v_K)_\tau) =$$
$$= \varepsilon(\tau) A(v_1 \otimes \dots \otimes v_K) = \varepsilon(\tau) v_1 \wedge \dots \wedge v_K$$

$\blacksquare$

Utilizzando quanto visto nella sezione 0.8 possiamo dedurre il seguente risultato

PROP. Sia $\{v_1 \dots v_n\}$ base di V. Allora l'insieme

$$\mathcal{B} = \{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_K} \mid (i_1 \dots i_K) \in \mathcal{J}\}$$

è una base di $\Lambda^K V$.

Inoltre $\forall T \in \Lambda^K V$ vale che

$$T = \sum_{I \in \mathcal{J}} T(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_K})\, v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_K}$$

dove $\{\varphi_1 \dots \varphi_K\}$ è la base duale di V^*.

DIM Dato che $\#\mathcal{B} = \binom{n}{k}$ per dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base è sufficiente verificare che generi $\Lambda^k V$, owero è sufficiente mostrare la formula.
Del resto se poniamo

$$T' = \sum_{I \in \mathcal{J}} T(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})\, v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$$

risulta che $\forall J \in \mathcal{J}$, $T'(\varphi_{j_1}, \dots \varphi_{j_k}) = \sum_{I} T(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k})\, v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_k}) =$

$$= T(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_k})$$

dove abbiamo utilizzato che $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}(\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_k}) = \prod_{\alpha=1}^{k} \delta_{i_\alpha j_\alpha}$.
Per il teorema 3 $T' = T$ e la dimostrazione è completa. ▨

THM 4. [PROPRIETÀ UNIVERSALE PRODOTTO ESTERNO]
Per ogni applicazione multilineare alterna $T : V^k \to W$ $\exists!$ applicazione lineare $\mathcal{H}(T) : \Lambda^k V \to W$ tale che il seguente diagramma commuta

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\wedge"'] & W \\ \Lambda^k V \arrow[ur, "\mathcal{H}(T)"'] & \end{tikzcd}$$

DIM: La dimostrazione segue la falsa riga della dimostrazione nel caso del prodotto tensore. In particolare l'unicità segue dal fatto (conseguenza della precedente proposizione) che l'immagine di $\wedge$ contiene una base di $\Lambda^k V$.
Circa l'esistenza si noti (sempre utilizzando la precedente proposizione) che se $v_1 \dots v_n$ è base di V allora $\exists!$ $H \in \mathrm{Hom}(\Lambda^k V; W)$

tale che $H(v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_k}) = T(v_{i_1},\ldots,v_{i_k})$ $\forall (i_1,\ldots,i_k)\in \mathcal{I}$.
Si osservi che $H\circ\wedge : V^k \longrightarrow W$ è k-lineare alterno e che $H\circ\wedge(v_{i_1},\ldots,v_{i_k}) = H(v_{i_1}\wedge\ldots\wedge v_{i_k}) = T(v_{i_1},\ldots, v_{i_k})$. Per il teorema 3 si ha che $H\circ\wedge \equiv T$ e dunque ponendo $H(T) := H$ la dimostrazione è completa $\blacksquare$

COR: La mappa $H \longmapsto H\circ\wedge$ realizza un isomorfismo canonico tra $\mathcal{A}_k(V;W)$ e $\mathrm{Hom}(\Lambda^k V; W)$

In particolare se $W\cong\mathbb{K}$ $\Lambda^k V^* \cong (\Lambda^k V)^*$

EX Dimostrare che tramite l'isomorfismo sopra descritto

$$\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k(v_1\wedge\ldots\wedge v_k) = \det(\varphi_i(v_j))_{\substack{i\le k\\ j\le k}}.$$

EX Per ogni multi-indice $I = (i_1<\ldots<i_k)$ si consideri l'applicazione k-lineare alterna su $\mathbb{K}^n$ definita da

$$T_I(X_1\ldots X_k) = \det[X_1\ldots X_k]_I$$

dove $[X_1\ldots X_k]_I$ é la sottomatrice $k\times k$ della matrice $n\times k$ $[X_1|\ldots|X_k]$ ottenuta selezionando le righe $i_1\ldots i_k$. Si dimostri che $\{T_I \mid I\in\mathcal{I}\}$ é una base di $\Lambda^k(\mathbb{K}^n)^*$
[Sugg. Se $e^1\ldots e^n$ è la base duale della base canonica
$T_I = e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}$ ...]

EX: Dimostrare che la proprietà universale determina $\Lambda^k V$ a meno di isomorfismi canonici.

EX Si dimostri che $\mathcal{A}_k(V^*;W)$ è canonicamente isomorfo a $\Lambda^k V \otimes W$

EX Sia $F: U_1 \times \ldots \times U_p \times V^q \longrightarrow W$ $(p+q)$-lineare e alterna negli ultimi q-fattori (ovvero per ogni $\underline{u} = (u_1 \ldots u_p) \in U_1 \times \ldots \times U_p$ l'applicazione $F_{\underline{u}} : V^q \to W$ $F_{\underline{u}}(v_1 \ldots v_q) := F(u_1 \ldots u_p\, v_1 \ldots v_q)$ è alterna). Dimostrare che $\exists!\ \mathcal{H}(F): U_1 \times \ldots \times U_p \times \Lambda^q V \longrightarrow W$ $(p+1)$-lineare tale che
$F(u_1 \ldots u_q\, v_1 \ldots v_p) = \mathcal{H}(F)(u_1, \ldots u_q, v_1 \wedge \ldots \wedge v_p)$.

EX Dimostrare che $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0$ se e solo se $v_1 \ldots v_k$ sono indipendenti.

EX* Siano $\{v_1 \ldots v_k\}$, $\{v_1' \ldots v_k'\}$ liste di vettori indipendenti in V. Dimostrare che $v_1 \wedge \ldots v_k$ è multiplo di $v_1' \wedge \ldots \wedge v_k'$ se e solo se $\mathrm{Span}(v_1 \ldots v_k) = \mathrm{Span}(v_1' \ldots v_k')$.

EX Siano $\{v_1 \ldots v_n\}$ e $\{v_1' \ldots v_n'\}$ due basi di V e $(\alpha_{ij}) \in GL(\mathbb{K}, n)$ tale che $v_i' = \sum_j \alpha_{ij} v_j$. Mostrare che

$$v_1' \wedge \ldots \wedge v_n' = \det(\alpha_{ij})\, v_1 \wedge \ldots \wedge v_n .$$

[sugg: Se $\{\varphi_1 \ldots \varphi_n\}$ è la base duale di $\{v_1, \ldots, v_n\}$ allora $\alpha_{ij} = \varphi_j(v_i')$. Ma dunque $v_1' \wedge \ldots \wedge v_n' (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \det(\alpha_{ij}) \ldots$]

. un

0.10 Prodotto wedge e struttura di algebra

Osserviamo che la mappa $V^{p+q} \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{p+q} V$ essendo alterna è in particolare alterna sui primi p-fattori e sugli ultimi q-fattori. Applicando quanto visto nella sezione 0.9 esiste una mappa $(p+1)$-lineare

$$V^p \times \Lambda^q V \longrightarrow \Lambda^{p+q} V$$

tale che $(v_1, \dots, v_p, u_1 \wedge \dots \wedge u_q) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_q$. Non è difficile mostrare che tale mappa è alterna nei primi p-fattori e dunque discende ad un'unica mappa bilineare

$$\beta : \Lambda^p V \times \Lambda^q V \longrightarrow \Lambda^{p+q} V$$

che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} V^p \times V^q \arrow[r, "\Lambda_{p+q}"] \arrow[d, "(\Lambda_p, \Lambda_q)"'] & \Lambda^{p+q} V \\ \Lambda^p V \times \Lambda^q V \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

dove $\Lambda_{p+q}(v_1, \dots, v_{p+q}) = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ e $(\Lambda_p, \Lambda_q)(v_1, \dots, v_{p+q}) = (v_1 \wedge \dots \wedge v_p, v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_{p+q})$

Abbiamo dunque dimostrato il seguente fatto

LEMMA Esiste un'unica applicazione bilineare

$$\beta : \Lambda^p V \times \Lambda^q V \longrightarrow \Lambda^{p+q} V$$

tale che $\beta(v_1 \wedge \dots \wedge v_p, u_1 \wedge \dots \wedge u_q) = v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_q \quad \forall v_1 \dots v_p u_1 \dots u_q \in V$.

DEF Dati $T \in \Lambda^p V$ e $S \in \Lambda^q V$ poniamo

$$T \wedge S := \beta(T, S)$$

OSS: $(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \wedge (u_1 \wedge \dots \wedge u_q) = v_1 \wedge \dots v_p \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_q$.

LEMMA Valgono le seguenti proprietà

(1) $(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R) \quad \forall T \in \Lambda^p V, S \in \Lambda^q V, R \in \Lambda^r V.$

(2) $T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T \quad \forall T \in \Lambda^p V \quad S \in \Lambda^q V$

DIM: Essendo le applicazioni $(T, S, R) \mapsto T \wedge (S \wedge R)$ e $(T, S, R) \mapsto (T \wedge S) \wedge R$ trilineari è sufficiente verificare (1) su tensori alterni semplici. Ma se $T = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$, $S = v_{p+1} \wedge \ldots \wedge v_{p+q}$ e $R = v_{p+q+1} \wedge \ldots \wedge v_{p+q+r}$ si ha dal lemma precedente che

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{p+q+r}.$$

Anche la verifica di (2) puó essere fatta assumendo $T = v_1 \wedge \ldots \wedge v_p$ e $S = u_1 \wedge \ldots \wedge u_q$. Se $p = 1$ e $T = v_1$ si ha che

$$T \wedge S = v_1 \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_q \quad \text{e} \quad S \wedge T = u_1 \wedge \ldots \wedge u_q \wedge v_1$$

Sfruttando che il prodotto wedge di vettori è alterno ricaviamo che $T \wedge S = (-1)^q S \wedge T$: infatti é necessario effettuare q scambi per passare da $T \wedge S$ a $S \wedge T$.

Induttivamente posto $T' = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{p-1}$ si ha che

$$T \wedge S = (T' \wedge v_p) \wedge S = T' \wedge (v_p \wedge S) = (-1)^q T' \wedge (S \wedge v_p) = (-1)^q (T' \wedge S) \wedge v_p =$$
$$(-1)^q (-1)^{(p-1)q} (S \wedge T') \wedge v_p = (-1)^{pq} S \wedge (T' \wedge v_p) = (-1)^{pq} S \wedge T.$$

Dove la seconda e la quinta uguaglianza valgono per la proprietà (1) mentre la quarta vale per ipotesi induttiva

$\blacksquare$

LEMMA $T \wedge S = \frac{1}{p!q!} A(T \otimes S)$

DIM Poiché entrambi i membri dell'uguaglianza dipendono in modo lineare da T e S é sufficiente verificare l'uguaglianza assumendo $T = v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_p}$ e $S = v_{j_1} \wedge \ldots \wedge v_{j_q}$ per $\{v_1 \ldots v_n\}$ base di V e $(i_1 \leq \ldots < i_p)$ $(j_1 < \ldots < j_q)$ multi-indici.

Distinguiamo 2 casi:

(1) $\exists\, 1 \leq \alpha < p$ e $1 \leq \beta \leq q$ t.c. $i_\alpha = j_\beta$.

Osserviamo che in questo caso $T \wedge S = 0$.

D'altra parte se $\{\varphi_1 \ldots \varphi_n\}$ é la base duale di V per ogni multi-indice $K = (k_1 \ldots k_{p+q})$ si ha che

$$A(T \otimes S)(\varphi_{k_1} \ldots \varphi_{k_{p+q}}) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon(\sigma)\, T(\varphi_{k_{\sigma(1)}} \ldots \varphi_{k_{\sigma(p)}})\, S(\varphi_{k_{\sigma(p+1)}} \ldots \varphi_{k_{\sigma(p+q)}})$$

Osserviamo che gli unici termini non nulli nella sommatoria sono quelli per cui

$$\begin{aligned} \{k_{\sigma(1)} \ldots k_{\sigma(p)}\} &= \{i_1 \ldots i_p\} \\ \{k_{\sigma(p+1)} \ldots k_{\sigma(p+q)}\} &= \{j_1 \ldots j_q\} \end{aligned} \qquad (*)$$

D'altra parte $\{k_{\sigma(1)} \ldots k_{\sigma(p)}\}$ e $\{k_{\sigma(p+1)} \ldots k_{\sigma(p+q)}\}$ sono disgiunti mentre per ipotesi $\{i_1 \ldots i_p\}$ e $\{j_1 \ldots j_q\}$ non lo sono. Dunque non esiste $\sigma \in S_{p+q}$ per cui vale $(*)$ e dunque

$A(T \wedge S)(\varphi_{k_1} \ldots \varphi_{k_{p+q}}) = 0$ $\forall\, K = (1 \leq k_1 < \ldots < k_{p+q} \leq n)$.

Segue che $A(T \wedge S) = 0$.

(2) Assumiamo ora che $\{i_1 \dots i_p\} \cap \{j_1 \dots j_q\} = \phi$

In questo caso fissato un multi-indice $K = (1 \leq K_1 < K_2 < \dots < K_{p+q} \leq n)$ si ha che $T \wedge S(\varphi_{K_1}, \dots, \varphi_{K_{p+q}}) = 0$ eccetto che nel caso in cui $\{K_1 \dots K_{p+q}\} = \{i_1, \dots, i_p, j_1 \dots j_q\}$.

In questo ultimo caso $T \wedge S(\varphi_{K_1} \dots \varphi_{K_{p+q}}) = \varepsilon(\sigma_0)$ dove σ_0 è la permutazione dell'insieme $\{1 \dots p+q\}$ che riordina $(i_1 \dots i_p \; j_1 \dots j_q)$

ovvero $i_\alpha = K_{\sigma_0(\alpha)}$ $\quad j_\beta = K_{\sigma_0(p+\beta)}$.

D'altra parte se $\{K_1 \dots K_{p+q}\} \neq \{i_1 \dots i_p \; j_1 \dots j_q\}$ allora ragionando come al punto (1) si ha

$$A(T \otimes S)(\varphi_{K_1} \dots \varphi_{K_{p+q}}) = 0$$

Ci rimane da calcolare $A(T \otimes S)(\varphi_{K_1} \dots \varphi_{K_{p+q}})$ nel caso in cui $\{K_1 \dots K_{p+q}\} = \{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_q\}$.

Ragionando come nel punto (1) posto

$$\mathcal{T} = \{\sigma \in S_{p+q} \mid \{i_1 \dots i_p\} = \{K_{\sigma(1)} \dots K_{\sigma(p)}\}, \{j_1 \dots j_p\} = \{K_{\sigma(p+1)} \dots K_{\sigma(p+q)}\}$$

si ha che

$$A(T \otimes S)(\varphi_{K_1} \dots \varphi_{K_{p+q}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \varepsilon(\sigma) \, T(\varphi_{K_{\sigma(1)}} \dots \varphi_{K_{\sigma(p)}}) \, S(\varphi_{K_{\sigma(p+1)}} \dots \varphi_{K_{\sigma(p+q)}})$$

Osserviamo che $\# \mathcal{T} = p! \, q!$

Più precisamente ogni $\sigma \in \mathcal{T}$ si scrive in modo unico come $\sigma = \sigma_0 \circ \psi$ dove $\psi(\{1 \dots p\}) = \{1 \dots p\}$ e $\psi(\{p+1 \dots p+q\}) = \{p+1 \dots p+q\}$.

Posto $S_{p,q} = \{\psi \in S_{p+q} \mid \psi\{1 \dots p\} = \{1 \dots p\}\}$ osserviamo che gli elementi $\psi \in S_{p,q}$ possono essere considerati come la composizione di una permutazione ψ_1 su $\{1 \dots p\}$ e una permutazione ψ_2 su $\{p+1 \dots p+q\}$

e inoltre $\varepsilon(\psi)=\varepsilon(\psi_1)\varepsilon(\psi_2)$. Mettendo insieme questi fatti otteniamo

$$A(T\otimes S)(\varphi_{k_1}\dots\varphi_{k_{p+q}})=\sum_{\psi\in S_{p,q}}\varepsilon(\sigma_0\psi)\,T(\varphi_{k_{\sigma_0(\psi(1))}}\dots\varphi_{k_{\sigma_0(\psi(p))}})\,S(k_{\sigma_0(\psi(p+1))}\dots k_{\sigma_0(\psi(p+q))})$$

$$=\sum_{\psi\in S_{p,q}}\varepsilon(\sigma_0)\varepsilon(\psi)\,T(\varphi_{i_{\psi(1)}}\dots\varphi_{i_{\psi(p)}})\,S(j_{\psi(p+1)-p},\dots j_{\psi(p+q)-p})$$

$$=\sum_{\psi\in S_{p,q}}\varepsilon(\sigma_0)\varepsilon(\psi)\varepsilon(\psi_1)\varepsilon(\psi_2)=p!q!\,\varepsilon(\sigma_0).$$

Dall'analisi di tutti questi casi risulta che

$$T\wedge S(\varphi_{k_1}\dots\varphi_{k_{p+q}})=\frac{1}{p!q!}A(T\otimes S)(\varphi_{k_1}\dots\varphi_{k_{p+q}})$$

$\forall$ multi-indice $(k_1\dots k_{p+q})$ per cui $T\wedge S=\frac{1}{p!q!}A(T\otimes S)$. $\blacksquare$

EX Fissati p,q consideriamo l'insieme di permutazioni

$$H_{p,q}=\{\sigma\in S_{p+q}\mid \sigma(1)<\dots<\sigma(p) \text{ e } \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)\}$$

Dimostrare che ogni $\sigma\in S_{p+q}$ si scrive in modo unico come $\sigma=\mu\circ\tau$ con $\mu\in H_{p,q}$ e τ t.c. $\tau(\{1\dots p\})=\{1\dots p\}$.

EX Dato un multiindice $I=(1\le i_1<i_2<\dots<i_p\le p+q)$ mostrare che $\exists!\,\sigma_I\in H_{p,q}$ t.c. $\sigma(1)=i_1\dots\sigma(p)=i_p$. Mostrare inoltre che $\varepsilon(\sigma_J)=(-1)^{\nu}$ con $\nu:=(i_p-p)+(i_{p-1}-(p-1))+\dots+(i_1-1)=\sum i_\alpha-\frac{p(p+1)}{2}$.

[Notare che per $p=1$ $\varepsilon(\sigma_I)=i_1-1$]

EX Siano T e S tensori alterni di grado p e q rispettivamente. Mostrare che $(T\otimes S)_\tau=\varepsilon(\tau)\,T\otimes S$ $\forall\tau\in S_{p+q}$ t.c. $\tau\{1\dots p\}=\{1\dots p\}$.

Dedurre che

$$T\wedge S=\sum_{\mu\in H_{p,q}}\varepsilon(\mu)(T\otimes S)_\mu$$

EX Sia $\varphi_1 \dots \varphi_n$ base duale della base canonica di $\mathbb{K}^n$

Fissati n vettori $X_1 \dots X_n$ in $\mathbb{K}^n$ sia $X = (X_1 | \dots | X_n)$ di modo che $X_{ij} = \varphi_i(X_j)$.

Sfruttando che $\det X = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n (X_1, \dots, X_n)$ e che $\forall \sigma \in H_{1,n-1}$ si ha $\varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n (X_{\sigma^{-1}(2)} \dots X_{\sigma^{-1}(n)})$ è il determinante della matrice ottenuta cancellando la riga 1 e la colonna $\sigma^{-1}(1)$ di X si deduca dal precedente esercizio la regola di Laplace per lo sviluppo del determinante.

EX* [REGOLA DI LAPLACE GENERALIZZATA]

Sia $n = p+q$. Fissato un multi-indice di lunghezza p $I = (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n)$ denotiamo con I^c il multi-indice di lunghezza q complementare.

Inoltre data una matrice X $n \times n$ e due multi-indici I, J denotiamo con X_{IJ} la sottomatrice ottenuta considerando le righe corrispondenti agli indici in I e le colonne corrispondenti agli indici in J.

Fissato $I_0 = (1, \dots, p)$ mostrare che

$$\det X = \sum_J \varepsilon(J) \det X_{I_0 J} \det X_{I_0^c J^c}$$

dove $\varepsilon(J) = \varepsilon(\mu_J) = (-1)^{\left(\sum j_\alpha - \frac{p(p+1)}{2}\right)}$

[sugg: utilizzare che $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n = \sum_{\mu \in H_{p,q}} \varepsilon(\mu) (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p \otimes \varphi_{p+1} \dots \varphi_{p+q})_\mu$]

Definiamo $\Lambda^* V = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k V$ dove per definizione $\Lambda^0 V := \mathbb{K}$, $\Lambda^1 V = V$.
Osserviamo che esiste un'unica applicazione bilineare

$$\wedge : \Lambda^* V \times \Lambda^* V \longrightarrow \Lambda^* V$$

che estende il prodotto wedge sui tensori alterni. Più precisamente dati $T, S \in \Lambda^* V$, abbiamo $T = \sum_{i=0}^{n} T_i$ $S = \sum_{i=0}^{n} S_i$ con $T_i, S_i \in \Lambda^i V$

per cui si pone

$$T \wedge S := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} T_i \wedge S_j$$

$[\, T_0 \in \mathbb{K}$ e $T_0 \wedge S_i := T_0 S_i \,]$

PROP $(\Lambda^* V, \wedge, 1)$ è un'algebra associativa con unità.

DIM: $(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R)$ se $T \in \Lambda^p V$ $S \in \Lambda^q V$ $R \in \Lambda^r V$.
Per trilinearità si verifica poi che tale formula vale $\forall\, T, S, R \in \Lambda^* V$.
Infine $1 \wedge T = 1 \cdot T = T$. ∎

$\Lambda^* V$ è detta algebra esterna di V.

0.11 Algebra esterna e funtorialità

In generale si ha che se T é un tensore alterno di grado p su V^* a valori in W (ovvero $T \in \Lambda^p V \otimes W$) e $f: V \to V'$ allora il tensore $f^{\otimes p}(T)$ definito come

$$f^{\otimes p} T : (V')^* \times \dots \times (V')^* \longrightarrow W$$

$$f^{\otimes p} T(\varphi_1 \dots \varphi_p) = T(\varphi_1 \circ f, \dots, \varphi_p \circ f)$$

è un tensore alterno. In altre parole

$$f^{\otimes p}(\Lambda^p V \otimes W) \subset \Lambda^p V' \otimes W$$

In particolare denoteremo con $\Lambda^p f$ la restrizione di $f^{\otimes p}$ a $\Lambda^p V$, di modo che $\Lambda^p f : \Lambda^p V \longrightarrow \Lambda^p V'$.

Avendo visto nella sezione 0.8 che $f^{\otimes p}$ commuta con l'alternatore ricaviamo facilmente la seguente proprietà:

LEMMA: $(\Lambda^p f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = f(v_1) \wedge \dots f(v_p)$

DIM: $(\Lambda^p f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = f^{\otimes p} A(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = A(f^{\otimes p} v_1 \otimes \dots \otimes v_p) =$
$A(f v_1 \otimes \dots \otimes f v_p) = f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_p)$. ▨

COR: Se $T \in \Lambda^p V$ e $S \in \Lambda^q V$ si ha

$$(\Lambda^{p+q} f)(T \wedge S) = (\Lambda^p f)(T) \wedge (\Lambda^q f)(S).$$

DIM: Per linearità possiamo ridurci a considerare il caso $T = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ e $S = v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_{p+q}$. In questo caso la formula é conseguenza diretta del lemma precedente. ▨

Sia $\Lambda^* f : \Lambda^* V \to \Lambda^* V'$ l'applicazione lineare che coincide con $\Lambda^p f$ su $\Lambda^p V$ dove poniamo per definizione $\Lambda^0 f = Id_{\mathbb{K}} : \Lambda^0 V \to \Lambda^0 V$.
Dal precedente corollario deduciamo immediatamente

COR $\Lambda^* f$ è un omomorfismo di algebre. $\square$

Infine abbiamo il seguente corollario che lega la matrice associata ad f rispetto a certe basi di V e V' alla matrice associata a $\Lambda^p f$ rispetto alle corrispondenti basi di $\Lambda^p V$ e $\Lambda^p V'$.

PROP Siano $\{v_1 \dots v_n\}$ base di V e $\{w_1 \dots w_m\}$ base di V'. Sia $[f]$ la matrice associata ad f rispetto a tali basi di modo che $f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} [f]_{ji} w_j$.
Allora $\forall\, I = (1 \le i_1 < \dots < i_p \le n)$ si ha

$$\Lambda^p f (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_p \le m} |f_{JI}|\, w_{j_1} \wedge \dots \wedge w_{j_p}$$

dove $|f_{JI}|$ è il determinante della sottomatrice $p \times p$ di $[f]$ ottenuta selezionando le righe $j_1 \dots j_p$ e le colonne $i_1 \dots i_p$.

DIM Posto $\Lambda^p f (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}) = \sum a_{JI}\, w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_p}$, sappiamo dalla proposizione in sezione 0.9 che

$$a_{JI} = \Lambda^p f (v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}) (\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_p})$$

dove $\{\varphi_1 \dots \varphi_m\}$ è la base di $(V')^*$ duale a $w_1 \dots w_m$.
Ma allora si ha

$$a_{JI} = f(v_{i_1}) \wedge \dots \wedge f(v_{i_p}) (\varphi_{j_1} \dots \varphi_{j_p}) = \det \left(\varphi_{j_\alpha}(f(v_{i_\beta})) \right)_{\substack{1 \le \alpha \le p \\ 1 \le \beta \le p}} = \det \left([f]_{j_\alpha i_\beta} \right)$$

$= \det [f]_{JI}$. ▨

Un caso particolarmente interessante si ha per $f: V \to V$.
In particolare osserviamo che $\dim \Lambda^n V = 1$ e dunque associato a $\Lambda^n f$ c'è uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\Lambda^n f(T) = \lambda T \quad \forall T \in \Lambda^n V$.
Dalla precedente proposizione deduciamo:

COR: $\lambda = \det f$.

OSS: Dati $f: V \to V'$ e $g: V' \to V''$ sappiamo già che $(g \circ f)^{\otimes p} = g^{\otimes p} \circ f^{\otimes p}$. Da ciò deduciamo che $\Lambda^p (g \circ f) = \Lambda^p g \circ \Lambda^p f$.

EX [FORMULA DI BINET GENERALIZZATA]
Data $A \in M_{k \times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n \times k}(\mathbb{K})$ allora

$$|AB| = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{J_0 I}| \; |B_{I J_0}|$$

dove $J_0 = (j_1 = 1, j_2 = 2, \dots j_k = k)$.
[sugg: Detti $L_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ e $L_B: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ le applicazioni lineari associate ad A, B rispetto alle basi canoniche si osservi che $L_{AB} = L_A \circ L_B$ e dunque $\Lambda^k L_{AB} = \Lambda^k L_A \circ \Lambda^k L_B \dots$]

EX Sia $f: V \to V'$. Verificare che se f è suriettiva allora $\Lambda^k f$ è suriettiva per ogni k. Più in generale se $W := \operatorname{Im} f \subset V'$ verificare che $\operatorname{Im} \Lambda^k V = \Lambda^k W$ considerato come sottospazio di $\Lambda^k V'$.

Ex Nelle ipotesi del precedente esercizio verificare che se $\{v_1 \dots v_n\}$ è base di V tale che $\{v_1 \dots v_h\}$ è base di $\mathrm{Ker}\, f$, allora una base di $\mathrm{Ker}\, \Lambda^k f$ è data da

$$\{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \ \text{ e } \ i_1 \leq h\}.$$

Ex Sia $f: V \to V$ un endomorfismo e sia $\{v_1 \dots v_n\}$ una base che triangola f, ovvero $f(v_i) = \lambda_i v_i + w_i$ con $w_i \in \mathrm{Span}\{v_1 \dots v_{i-1}\}$

Dimostrare che $\forall\, I = (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$, posto $v_I = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$) si ha che $\Lambda^k f(v_I) = \lambda_I v_I + w_I$ con $\lambda_I = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ e $w_I \in \mathrm{Span}\{v_J \mid j_\alpha \leq i_\alpha \text{ e } J \neq I\}$. Si deduca che

$$\mathrm{tr}\, \Lambda^k f = \sum_I \lambda_I .$$

[sugg: si ragioni per induzione su k]

Ex* Sia A una matrice $n \times n$ e sia $p_A(t)$ il suo polinomio caratteristico: $p_A(t) = \det(A - t\,\mathrm{Id})$. Posto $p_A(t) = (-1)^n t^n + c_1 t^{n-1} + \dots + c_n$ si dimostri che $c_i = (-1)^{n-i}\, \mathrm{tr}\, \Lambda^i L_A$ dove $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è l'endomorfismo definito da $L_A(X) = AX$.

[sugg: Si consideri per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ l'esercizio precedente. Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ridursi a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.]