Foglio n. 8 del 07/01/2019

ESERCIZIO 1: Sia $\pi : E \longrightarrow M$ fibrato vettoriale reale di rango 2 orientabile. Si dimostri che E è banale se e soltanto se esiste una sezione su M mai nulla.

ESERCIZIO 2: Data una mappa $\mathcal{C}^\infty$ $\varphi : S^2 \to S^1$ verificare che $\exists\, f : S^2 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ tale che $\varphi(x) = e^{i f(x)}$ $\forall x \in S^2$
[sugg: $\varphi^*(d\theta)$ é esatta....].
Dedurre che non esiste $\varphi : S^2 \to S^1$ t.c. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ $\forall x \in S^2$
[sugg: posto f come sopra osservare che la funzione $\xi(x) = f(x) - f(-x)$ sarebbe una costante non nulla...]

ESERCIZIO 3: Sia $E = S^2 \times \mathbb{R}^2 / \sim$ dove $(x,\xi) \sim (y,\eta)$ se $(x,\xi) = \pm (y,\eta)$.

(1) Mostrare che la mappa $\pi : E \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ $\pi([x,\xi]) = [x]$ definisce un fibrato vettoriale orientabile su $\mathbb{R}P^2$.

(2) Detta $p : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ la proiezione canonica verificare che $p^*(E)$ è il fibrato banale

(3) Verificare che ogni sezione σ di E corrisponde ad una mappa $\varphi_\sigma : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\varphi_\sigma(x) = -\varphi_\sigma(-x)$ $\forall x \in S^2$

(4) Dedurre che E non è banale [sugg: si utilizzi l'esercizio precedente]

OSS Si osservi che $e(E) = 0$ dato che $H^2(\mathbb{R}P^2) = 0$

ESERCIZIO 4: Sia $\epsilon^k_{\mathbb{R}} \to M$ il fibrato banale reale di rango k e $\epsilon^k_{\mathbb{C}} \to M$ il fibrato banale complesso di rango k.

(1) Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale complesso con $c(E) \neq 0$. Mostrare che $E \oplus \epsilon^k_{\mathbb{C}}$ è non banale $\forall k$.

(2) Posto $M = \mathbb{C}P^1$ e $E = T\mathbb{C}P^1$ con naturale struttura complessa dedurre che $E \oplus \epsilon^2_{\mathbb{C}}$ è un fibrato complesso non banale.

(3) Si mostri che $T\mathbb{C}P^1 \oplus \epsilon^1_{\mathbb{R}}$ è banale come fibrato reale.
[sugg: si osservi che $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ e $TS^2 \oplus N(S^2; \mathbb{R}^3) \cong T\mathbb{R}^3|_{S^2}$ ma $N(S^2, \mathbb{R}^3) \cong \epsilon^1_{\mathbb{R}} \ldots$]

(4) Si deduca che $E \oplus \epsilon^2_{\mathbb{C}}$ come fibrato reale è banale.

ESERCIZIO 5: Si mostri che due fibrati complessi di rango 1 sono isomorfi come fibrati complessi se e soltanto se sono isomorfi come fibrati reali orientati.
[sugg: si dimostri dapprima che se $f: V \to W$ è un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare tra spazi vettoriali complessi di rango 1 compatibile con le orientazioni naturali allora la mappa $L_f(v) = f(iv) + i f(v)$ è $\mathbb{C}$ lineare e non nulla]

ESERCIZIO 6 Sia $E \xrightarrow{p} M$ un fibrato vettoriale complesso di rango k. Si assuma che esistano $\sigma_1 \ldots \sigma_p$ sezioni indipendenti (su $\mathbb{C}$) in ogni punto di M. Si dimostri che $c_i(E) = 0$ per $i = k-p+1, \ldots, k$ [sugg: si osservi che E è la somma diretta del fibrato banale di rango p e di un fibrato di rango $k-p \ldots$]

ESERCIZIO 7*: Sia $E \xrightarrow{p} M$ un fibrato complesso di rango 1. Si assuma che σ sia sezione di E che interseca la sezione nulla in modo trasverso. Poniamo $X = \sigma^{-1}(0)$.

(1) verificare che X è una sottovarietà di M di dimensione $\dim M - 2$.

(2) Si dimostri che $c_1(E)|_{M \setminus X}$ è esatta e si concluda che esiste rappresentante α di $c_1(E)$ con supporto contenuto in un intorno tubolare N di E.

(3) Si costruisca un isomorfismo di fibrati reali tra $E|_X$ e il fibrato normale di X in M. [sugg: si segua la falsa riga della dimostrazione data nel caso reale]

(4) Assumendo M orientata si dimostri che esiste un'unica orientazione su X tale che l'isomorfismo costruito sopra sia un isomorfismo tra fibrati orientati

(5) Sia D un disco embedded in M che interseca X in modo trasverso in un punto p_0 e orientato in modo che $\varepsilon_{p_0}(M, X) = 1$. Si assuma che D sia contenuto in una carta banalizzante (U_0, φ_0) intorno a p_0 e sia $f: D \to \mathbb{C}$ definita da $f(p) = \varphi_0(\sigma(p))$. Mostrare $\int_{\partial D} d(\operatorname{Im} \log f) = 2\pi$.

[sugg: si noti che $f^{-1}(0) = p_0$ e inoltre per trasversalità f è diffeo intorno a p_0. La scelta dell'orientazione implica che vicino a 0 tale diffeo preserva orientazione ...]

(6) Si dimostri che $c_1(E)$ é la duale di Poincaré di X [sugg: si fissi un atlante di banalizzazione contenente l'aperto $M \setminus X$ con banalizzazione associata a σ e carte della forma $r^{-1}(U_\alpha)$ dove $\{U_\alpha\}$ è ricoprimento di X e $r: N \to X$ é la retrazione associata ad un intorno tubolare. Si osservi che il rappresentante ω di $c_1(E)$ associato a tale banalizzazione ha supporto in N. Per concludere basta mostrare che esiste $p_0 \in X$ t.c. $\int_{r^{-1}(p_0)} \omega = 1$. Si osservi che é possibile supporre che p_0 sia contenuto in un solo U_α e si usi il punto precedente]