Foglio di esercizi n.5 del 16/11/2018

ESERCIZIO 1: Sia M varietá differenziale, ω una 1-forma su M e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Si consideri la formula

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

(1) Si dimostri questa formula assumendo che X, Y siano campi coordinati.

(2) Si dimostri la formula assumendo $X = f\frac{\partial}{\partial x_i}$ $Y = g\frac{\partial}{\partial x_j}$ con $x_1 \dots x_n$ coordinate locali e f e g funzioni $\mathcal{C}^\infty$.

(3) Si dimostri la formula nel caso generale.

ESERCIZIO 2: Sia ω una 1-forma differenziale su una varietá $M^{(n)}$ e consideriamo la distribuzione di n-piani in $M \times \mathbb{R}$ data da

$$\mathcal{H}^\omega_{(p,t)} = \{(v,s) \in T_{(p,t)}(M \times \mathbb{R}) \mid \omega_p(v) = s\}$$

1. Dimostrare che H^ω é una distribuzione liscia.
2. Dimostrare che H^ω é integrabile se e solo se ω é chiusa.
3. Assumendo che ω sia chiusa sia f una primitiva locale per ω definita su un aperto $U \subset M$. Si mostri che la mappa $\sigma_f : U \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ definita da $\sigma_f(x) = (x, f(x))$. Dimostrare che σ_f é una varietá integrale per $\mathcal{H}^\omega$.

ESERCIZIO 4 * Con le notazioni del precedente esercizio sia $P_\omega : \pi_1(M, x_0) \to \mathbb{R}$ l'omomorfismo definito da $P_\omega([\alpha]) = \int_\alpha \omega$, e sia $p: \tilde{M} \to M$ il rivestimento associato a $K = \operatorname{Ker} P_\omega$.

(1) Mostrare che $\tilde{\omega} := p^*(\omega)$ è esatta.

(2) Detta $\tilde{f}$ la primitiva di $\tilde{\omega}$ t.c. $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = t_0$ si considera la mappa $\sigma_{\tilde{f}} : \tilde{M} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ data da $\sigma_{\tilde{f}}(x) = (p(x), \tilde{f}(x))$.
Mostrare che $\sigma_{\tilde{f}}$ è iniettiva.

(3) Mostrare che $\sigma_{\tilde{f}}$ è varietà integrabile di $\mathcal{H}^\omega$.

ESERCIZIO 5 Sia $\mathcal{H}$ una distribuzione di k-piani in una varietà M di dim n.

(1) Mostrare che $\forall p_0 \in M$ esiste un intorno U di p_0 e 1-forme $\alpha_1 \dots \alpha_{n-k} \in \Omega^1(U)$ t.c.

$$\mathcal{H}_p = \operatorname{Ker} \alpha_1(p) \cap \operatorname{Ker} \alpha_2(p) \cap \dots \cap \operatorname{Ker} \alpha_{n-k}(p) \qquad \forall p \in U.$$

(2) Verificare che $\mathcal{H}$ è integrabile su U se e solo se $d\alpha_i(v, w) = 0$ $\forall v, w \in \mathcal{H}|_U$ [sugg: usare esercizio 1]

(3) Mostrare che tale condizione è equivalente a chiedere che $\exists\, \xi_{ij} \in \Omega^1(U)$ $1 \leq i, j \leq n-k$ t.c. $d\alpha_i = \sum_j \xi_{ij} \wedge \alpha_j$.

ESERCIZIO 6 Sia M varietà orientabile connessa e non compatta. Mostrare che M non è omotopicamente equivalente a nessuna varietà compatta e orientabile della stessa dimensione.

ESERCIZIO 7 Sia M una varietà differenziale di dim n e sia S una sottovarietà chiusa di dim $n-1$. Diciamo che S ammette un equazione globale se esiste $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ t.c. 0 è valore regolare di f e $M = f^{-1}(0)$.

(1) Dimostrare che se M ammette un'equazione globale allora $M \setminus S$ ha esattamente due componenti connesse. (in questo esercizio M e S sono assunte connesse)

(2) Verificare che se viceversa $M \setminus S$ ha due componenti connesse allora S ammette un'equazione globale.

(3) Dimostrare che se S ammette un'equazione globale allora la duale di Poincare di S, η_S, è nulla in $H^1_{dR}(M)$.

ESERCIZIO 8 Siano M_1 e M_2 varietà orientate di dimensione n. Siano $\omega_1 \in \Omega^n(M_1)$ e $\omega_2 \in \Omega^n(M_2)$ t.c. $\int_{M_1} \omega_1 = \int_{M_2} \omega_2 = 1$.

Considerando l'orientazione su $M = M_1 \times M_2$ per cui $\int_{M_1 \times M_2} \pi_1^*(\omega_1) \wedge \pi_2^*(\omega_2) = 1$

si consideri le sottovarietà $S = M_1 \times \{m_2\}$ e $S' = \{m_1\} \times M_2$

Si mostri che duali di Poincaré di S e S' sono rispettivamente $\eta_S = \pi_2^*(\omega_2)$ e $\eta_{S'} = \pi_1^*(\omega_1)$.

ESERCIZIO 9: Sia $M^{(n)}$ varietá orientata $\overset{cpt}{\vee}$ e consideriamo la forma bilineare $\langle\ \rangle_p : H^*(M)\times H^*(M)\longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $[\alpha]\in H^p(M)$ $[\beta]\in H^q(M)$ allora

$$\langle[\alpha],[\beta]\rangle_p = \begin{cases} \int_M \alpha\wedge\beta & \text{se } q=n-p \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(1) Si verifichi che $\langle\, ,\rangle_p$ é forma non degeneri

(2) Si verifichi che se $[\alpha_1]\dots[\alpha_N]$ é base di $H^*(M)$ t.c. α_i é una p_i-forma, allora esiste una base $[\alpha_1^*],\dots,[\alpha_N^*]$ t.c. $\langle[\alpha_i],[\alpha_j^*]\rangle_p=\delta_{ij}$ e α_i^* é una n-p forma.

(3) Verificare che se $[\omega],[\eta]\in H^*(M)$ allora
$$\langle[\omega],[\eta]\rangle_p=\sum_i\langle[\omega],[\alpha_i^*]\rangle_p\langle[\alpha_i],[\eta]\rangle_p$$

(4) Orientando $M\times M$ in modo che $\pi_1^*(\omega)\wedge\pi_2^*(\omega)$ é positiva $\forall$ n-forma ω, si dimostri che
$$\int_{M\times M}\pi_1^*(\alpha)\wedge\pi_2^*(\beta)=\int_M\pi_1^*(\alpha)\int_M\pi_2^*(\beta)\quad\forall\ n\text{-forme } \alpha,\beta$$
$$\int_\Delta\pi_1^*(\alpha)\wedge\pi_2^*(\beta)=\langle[\alpha],[\beta]\rangle_p\quad\forall[\alpha]\in H^p(M)\quad\beta\in H^{n-p}(M)\quad\text{dove}$$
$\Delta=$ diagonale di $M\times M$

(5) Si mostri che la duale di Poincaré di Δ in $M\times M$ é
$$\eta_\Delta=\sum(-1)^{p_i(n-p_i)}\pi_1^*(\alpha_i^*)\wedge\pi_2^*(\alpha_i)$$

[sugg: verificare che se $[\omega]\in H^p(M)$ $[\eta]\in H^{n-p}(M)$

$$(-1)^{p_i(n-p_i)}\int_{M\times M}\pi_1^*(\omega)\wedge\pi_2^*(\eta)\wedge\pi_1^*(\alpha_i^*)\wedge\pi_2^*(\alpha_i)=\begin{cases}0 & \text{se } p\neq p_i\\ \langle[\omega],[\alpha_i^*]\rangle_p\langle[\alpha_i],\eta\rangle_p\end{cases}$$

e poi applicare (2) e Hurewitz)

ESERCIZIO 10 Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un $\{id\}$-fibrato. Mostrare che π è banale.

ESERCIZIO 11 Sia $\pi: E \to \mathbb{R}$ un fibrato vettoriale di rango k.

(1) Supponiamo di avere banalizzazioni su (a,b) e su (c,d) in modo che $a<c<b<d$.
Si verifichi che a meno di cambiare la banalizzazione su $[c,d]$ è possibile assumere che il cociclo di transizione $g: (c,b) \to GL(k,\mathbb{R})$ abbia valori in $GL^+(k,\mathbb{R})$.

(2) Si dimostri che esiste $\lambda: (a,b) \to GL(k,\mathbb{R})$ e $\mu: (c,d) \to GL(k,\mathbb{R})$ t.c.
$\lambda \equiv 1$ su $(a, b-\varepsilon)$ $\mu \equiv 1$ su $(c+\varepsilon, d)$ t.c.

$$\mu(x) = g(x)\lambda(x) \quad \forall x \in (c,b)$$

Si deduca che esiste una banalizzazione di E su (a,d).

(3) Si concluda che $\pi: E \to \mathbb{R}$ è banale.

ESERCIZIO 12 Sia $\pi: E \to M$ un fibrato vettoriale di rango k. Sia $\mathbb{P}E = \bigcup_{x\in M} \mathbb{P}E_x$. Si verifichi che su $\mathbb{P}E$ c'è una struttura di $PGL(k,\mathbb{K})$ a fibra $\mathbb{K}P^{k-1}$ t.c. se $\varphi: E|_U \to U \times \mathbb{K}^k$ è una banalizzazione allora $P_\varphi: \mathbb{P}E|_U \to U \times \mathbb{K}P^{k-1}$ dato da $(\mathbb{P}\varphi)_x([v]) = [\varphi(v)]$.
Se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ è una banalizzazione di E, con cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$

verificare che il cociclo associato alla banalizzazione $\{(U_\alpha, \mathbb{P}\varphi_\alpha)\}$ di $\mathbb{P}E$ è dato da $\mathbb{P}_{g_{\alpha\beta}}$ dove $\mathbb{P}A$ indica la trasformazione proiettiva su $\mathbb{K}P^{k-1}$ indotta da A.

ESERCIZIO 13: Sia $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Poniamo $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n /\sim$ dove $(x, \xi) \sim (x+n, A^n \xi)$.

(1) Si consideri la mappa $E \to S^1$ definita da $[x, \xi] \longmapsto e^{i 2\pi x}$. Si dimostri che tale mappa è ben definita e continua

(2) Fissato $z \in S^1$ e posto $x \in \mathbb{R}$ t.c. $e^{i2\pi x} = z$ si verifichi che la mappa $\varphi_x^{-1} : \mathbb{R}^n \to E_z$ $\varphi_x^{-1}(\xi) = [x, \xi]$ è un omeomorfismo e che se x' è un'altra determinazione dello angolo in z, in modo che $x' - x = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, allora
$\varphi_x \varphi_{x'}^{-1}(\xi) = A^m \xi$.

(3) Si mostri che E ha una naturale struttura di fibrato vettoriale t.c. se $I \subset S^1$ è un'intervallo e $x : I \to \mathbb{R}$ è una determinazione continua dell'angolo allora
$\psi : E|_I \to I \times \mathbb{R}^n$ t.c. $\psi_z := \varphi_{x(z)}$
è banalizzazione.

(4) Mostrare che il fibrato è banale se e solo se A è nella componente connessa di Id. (ovvero $GL^+(n, \mathbb{R})$)