Foglio di esercizi n.4 del 10/11/2018

ESERCIZIO 1: Sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione C^∞, tale che 0 sia valore regolare e sia $M_F = F^{-1}(0)$.

Sia $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$G(X,Y) = (F(X),\ DF(X) \cdot Y)$$

(1) Verificare che $(0,0)$ è valore regolare di G e che

$$G^{-1}(0,0) = TM_F .$$

(2) Fissato $(X,Y) \in TM_F$ verificare che un elemento $(X',Y') \in \mathbb{R}^{2n}$ è tangente a TM_F in (X,Y) se e solo se

$$\begin{cases} DF(X) \cdot X' = 0 \\ D^2F(X)(X',Y) + DF(X) \cdot Y' = 0 \end{cases}$$

dove $D^2(F)(X',Y) = \sum_{i,j} F_{ij}(X) X'_i Y_j$.

(3) Sia $Z_0: TM_F \to \mathbb{R}^{2n}$ il campo definito da $Z_0(X,Y) = (Y,0)$.
Sotto quali condizioni questo campo è tangente a TM_F?

(4) Sia $Z: TM_F \to \mathbb{R}^{2n}$ definito da

$$Z(X,Y) = \left(Y, -\frac{D^2F(X)(Y,Y)}{\|DF(X)\|^2} DF(X)\right)$$

Dimostrare che Z è un campo tangente a TM_F.

(5) Assumendo che M_F sia compatta mostrare che Z è completo.
(sugg: verificare che se $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$ è una linea di flusso per Z allora $\|Y(t)\|$ è costante ....)

(6) Verificare che $\gamma(t) = (X(t), Y(t))$ é linea di flusso per Z se e solo se $\ddot{X}(t) \in (T_{X(t)} M_F)^{\perp}$.

ESERCIZIO 2: Sia M sottovarietà di $\mathbb{R}^N$ e siano $x_1 \dots x_n$ coordinate locali su un aperto U di M. Posto $TM|_U = \{(X,Y) \in TM \mid X \in U\}$ poniamo

$$x_i : TM|_U \to \mathbb{R} \quad x_i(X,Y) := x_i(X);$$

$$\xi_i : TM|_U \to \mathbb{R} \quad \xi_i(X,Y) := d_X x_i (Y).$$

(1) Verificare che $x_1 \dots x_n \xi_1 \dots \xi_n$ sono coordinate su $TM|_U$.

(2) Fissate altre coordinate locali $y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n)$ su U e dette $y_1 \dots y_n$ $\eta_1 \dots \eta_n$ le coordinate indotte su $TM|_U$, fissato $X_0 \in U$ e $Y_0 \in T_{X_0} M$ siano a_{ij} b_{ij} c_{ij} $d_{ij} \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{(X_0,Y_0)} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{(X_0,Y_0)} + b_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big|_{(X_0,Y_0)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i}\Big|_{(X_0,Y_0)} = \sum c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{(X_0,Y_0)} + d_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big|_{(X_0,Y_0)}$$

Calcolare $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ in termini delle derivate di $\varphi_1 \dots \varphi_n$ in X_0.

(3) Osservare che la distribuzione generata da $\{\frac{\partial}{\partial \eta_1} \dots \frac{\partial}{\partial \eta_n}\}$ coincide con la distribuzione generata da $\{\frac{\partial}{\partial \xi_1} \dots \frac{\partial}{\partial \xi_n}\}$

Qual é la varietà integrale di tale distribuzione?

(4) Mostrare che in generale la distribuzione generata da $\{\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ non coincide con la distribuzione generata da $\{\frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_n}\}$ su $TM|_U$.

Sotto quale condizione coincidono.

ESERCIZIO 3 : Sia M sottovarietà di $\mathbb{R}^N$ e si consideri $\forall (X,Y)$ in TM il funzionale

$$\lambda_{(X,Y)} : T_{(X,Y)} TM \to \mathbb{R}$$

definito da $\lambda_{(X,Y)}(X', Y') = Y \cdot X'$.

(1) Verificare che $\lambda \in \Omega^1(TM)$

(2) Verificare che $d\lambda_{(X,Y)} : T_{(X,Y)} TM \times T_{(X,Y)} TM \to \mathbb{R}$

é una forma bilineare non degenere

[sugg: provare a scrivere $d\lambda$ nelle coordinate introdotte nel precedente esercizio]

ESERCIZIO 4

Si dimostri che la mappa

$$f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$$

$$f([x:y:z]) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}, \frac{xz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{yz}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y^2+2z^2}{x^2+y^2+z^2} \right)$$

é un embedding.

ESERCIZIO 5 : Sia $A : S^2 \to S^2$ la mappa antipodale, $A(X) = -X$.

(1) Verificare che A inverte l'orientazione.

(2) Dedurre che se ω é una 2-forma su S^2 tale che $A^*\omega = \omega$ allora $\int_{S^2} \omega = 0$.

(3) Sia $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ la proiezione canonica.
Dimostrare che $\pi^* : \Omega^2(\mathbb{R}P^2) \to \Omega^2(S^2)$ è iniettiva e $\mathrm{Im}\, \pi^* = \{ \omega \in \Omega^2(S^2) \mid A^*\omega = \omega \}$

(4) Dedurre che $\mathbb{R}P^2$ non è orientabile.

(5) Verificare che ogni 2-forma su $\mathbb{RP}^2$ è esatta.

ESERCIZIO 6 Mostrare che la mappa antipodale $A: S^n \to S^n$ preserva l'orientazione per n dispari e inverte l'orientazione per n pari. Dedurre che $\mathbb{RP}^n$ è orientabile $\Leftrightarrow$ n è dispari

ESERCIZIO 7

(1) Si dimostri che $GL_n(\mathbb{C})$ è connesso

[sugg: fissate $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ il piano affine complesso $\{(1-z)A + zB \mid z \in \mathbb{C}\}$ contiene solo un numero finito di matrici non invertibili ....]

(2) Si dimostri che se $L: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare il suo determinante reale (ovvero considerando $\mathbb{C}^n$ come spazio vettoriale reale) è sempre positivo.

(3) Sia M una varietà di dimensione $2n$ e $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante di carte $\varphi_\alpha: U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ tale che $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ sia olomorfa. Dedurre che l'atlante è positivo.

(4) Mostrare che $\mathbb{CP}^n$ è orientabile $\forall n$.

ESERCIZIO 8 Utilizzando la successione di Mayer Vietoris sugli aperti $U=\{[x_0:\dots:x_n] \mid x_n \neq 0\}$ e $V=\mathbb{RP}^n \setminus \{[0:\dots:0:1]\}$ verificare che
$$\dim H^i(\mathbb{RP}^n)=\begin{cases} 1 & \text{se } i=0 \\ 0 & \text{se } i\neq 0,n \\ 0 & \text{se } i=n \text{ pari} \\ 1 & \text{se } i=n \text{ dispari}\end{cases}$$

ESERCIZIO 9 Utilizzando la successione di Mayer-Vietoris sugli aperti $U=\{[z_0:\dots:z_n]\in\mathbb{CP}^n \mid z_n\neq 0\}$ e $V=\mathbb{CP}^n\setminus\{[0:\dots:1]\}$ si verifichi che
$$\dim H^i(\mathbb{CP}^n)=\begin{cases} 1 & \text{se } i=0,2,4,\dots 2n \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

ESERCIZIO 10 Sia U un aperto di una varietà $M^{(n)}$ t.c. $\overline{U}$ è diffeomorfo ad una palla chiusa (ovvero $\exists$ V aperto di M che contiene $\overline{U}$ e $\varphi: V \to \mathbb{R}^n$ carta tale che $\varphi(\overline{U})$ è palla chiusa). Dimostrare che se M è compatta e orientabile
$$H^n(M\setminus\overline{U})=\{0\}$$
$$H^i(M\setminus\overline{U})\cong H^i(M) \quad \text{per } i<n.$$

ESERCIZIO 11

(1) Sia $T=S^1\times S^1$. Posto $U=\{(z_1,z_2)\in S^1\times S^1 \mid z_1\neq 1\}$ e $V=\{(z_1,z_2)\in S^1\times S^1 \mid z_1\neq -1\}$ dimostrare che $\dim H^1(T)=2$ $\dim H^2(T)=1$.

(2) Sia S una superficie compatta connessa orientabile di genere γ. Verificare che $H^0(S)\cong\mathbb{R}$, $H^1(S)\cong\mathbb{R}^{2g}$, $H^2(S)\cong\mathbb{R}$.
[sugg: considerare un ricoprimento di $S=U\cup V$ con U omeomorfo ad un toro meno un disco e V una superficie di genere $\gamma-1$ meno un disco e ragionare induttivamente]

ESERCIZIO 12 ★

Sia ω una 1-forma chiusa su una varietà M.

(1) Si supponga che $\omega|_U = df$, dove U è aperto di M e $f: U \to \mathbb{R}$. Dato $\alpha: [a,b] \to U$ continuo si definisca $\int_\alpha \omega = f(b) - f(a)$. Si dimostri che la definizione è ben posta e coincide con $\int_I \alpha^*(\omega)$ se α è differenziale.

Si mostri inoltre che $\int_{\alpha * \beta} \omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega$, $\int_{\alpha^\vee} \omega = -\int \omega$

(2) Fissato un cammino $\alpha: [a,b] \to M$ si fissi una partizione di $[a,b]$ $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ in modo che $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ è contenuto in un aperto $U_i \cong \mathbb{R}^n$. Si osservi che $\omega|_{U_i}$ è esatta e si definisca

$$\int_\alpha \omega = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}} \omega$$

Si dimostri che la definizione è ben posta e che $\int_{\alpha * \beta} \omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega$

(3) Si dimostri che ω è esatta se e solo se $\int_\alpha \omega = 0$ per ogni curva chiusa.

(4) Si verifichi che se $F: I \times I \to M$ ha immagine contenuta in un aperto contraibile di M e posto $\alpha = F|_{\partial(I \times I)}$, verificare che $\int_\alpha \omega = 0$

(5) Mostrare che $\forall\, F: I \times I \to M$ continua, posto $\alpha = F|_{\partial(I \times I)}$ si ha che $\int_\alpha \omega = 0$ [sugg. Fissare partizione di I, in modo che posto $Q_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ si abbia che $F(Q_{ij})$ è contenuto in

aperto contraibile. Verificare che $\int_\alpha \omega = \sum \int_{\alpha_{ij}} \omega$ dove $\alpha_{ij} = F|_{\partial Q_{ij}}$ e concludere)

(6) Mostrare che se M é semplicemente connessa $H^1_{dR}(M) = \{0\}$.

(7) Sia $\tilde{M} \xrightarrow{p} M$ il rivestimento universale di M e si identifichi $\pi_1(M, x_0)$ con $Aut(\pi)$ attraverso l'isomorfismo che associa a $T \in Aut(\pi)$ la classe di equivalenza del cammino $\pi \circ \alpha_T$ dove α_T é un arco che congiunge $\tilde{x}_0$ a $T^{-1}(\tilde{x}_0)$

Fissata una 1-forma chiusa ω sia $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ t.c. $\pi^*(\omega) = d\tilde{f}$.

Si dimostri che $\forall$ automorfismo T si abbia

$$f(Tx) = f(x) + c_T \quad \forall x \in \tilde{M}$$

dove $c_T = \int_{\pi \circ \alpha_T^{-1}} \omega$.

(8) Si mostri che $\pi^* : \Omega^1(M) \to \Omega^1(\tilde{M})$ é iniettivo e

$$\pi^*(\Omega^1(M)) = \{\omega \in \Omega^1(\tilde{M}) \mid T^*\omega = \omega \ \forall \text{ automorfismo } T\}$$

(9) Con le notazioni del punto (7) si verifichi che

$$C : Aut(\pi) \to \mathbb{R}, \quad T \mapsto C_T$$

é un omomorfismo di gruppi.

(10) Fissato un omomorfismo di gruppi $C : Aut(\pi) \to \mathbb{R}$ dimostrare che esiste $f : \tilde{M} \to \mathbb{R}$ t.c. $f(Tx) = f(x) + C(T)$ $\forall T \in Aut(\pi)$ e per ogni $x \in M$.

[sugg: fissare un ricoprimento buono di $M = U_1 \cup \ldots \cup U_N$ e fissare $\forall i$ una componente $\tilde{U}_i^0$ di $\pi^{-1}(U_i)$ e porre $\tilde{U}_i^T = T(\tilde{U}_i^0)$

Verificare che $\{\tilde{U}_i^T \mid_{i=1\ldots n}, T \in Aut(\pi)\}$ é ricoprimento di

M e che se ρ_i è p.u. su M subordinata a U_i, allora ponendo
$\tilde{\rho}_i^T = \begin{cases} \rho_i \circ \pi & \text{su } \tilde{U}_i^T \\ 0 & \text{su } M \setminus \tilde{U}_i^T \end{cases}$, $\tilde{\rho}_i^T$ è p.u. subordinata a $\{\tilde{U}_i^T\}$.

Porre $f(x) = \sum_{i,T} \rho_i^T(x)\, c(T) \dots$]

(11) Dimostrare che $H^1_{dR}(M)$ è isomorfo a $\mathrm{Hom}(\mathrm{Aut}(\pi), \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R})$, attraverso l'omomorfismo

$$\begin{aligned} H^1_{dR}(M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R}) \\ [\omega] &\longrightarrow \int_\bullet \omega \end{aligned}$$

dove $\int_\bullet \omega \, ([\alpha]) = \int_\alpha \omega$.