ESERCIZI TUTORATO 2

Esercizio 1 ------ appello 23/1/14, teoria, es. 1.4 (esercizio 4 della prima prova)

Stabilire quali fra i seguenti sistemi di equazioni rappresentano una retta nello spazio

(a) $\begin{cases} x - y = 2 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

(b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

(c) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

(d) $\begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

Esercizio 2 ------ appello 23/1/14, teoria, es 2.4 (esercizio 4 della seconda prova)

Stabilire quali fra i seguenti sistemi di equazioni rappresentano un piano nello spazio

(a) $\begin{cases} x - y = 2 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

(b) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

(c) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 6 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

(d) $\begin{cases} z = 2 \end{cases}$ sì ◯ no ◯

Esercizio 3 ------ appello 23/1/14, pratica, es. 1.4 (esercizio 4 della prima prova)

Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano π di equazione $x + 2y - z = 1$ ed il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Determinare:

(a) Le intersezioni del piano π con gli assi coordinati:

(b) Le equazioni cartesiane della retta r passante per A perpendicolare al piano π:

(c) L'equazione cartesiana del piano σ passante per A parallelo a π:

(d) La distanza tra i piani π e σ:

(e) La direzione della retta s intersezione di π con il piano x, y:

Esercizio 4 ------ appello 23/6/14, pratica, es 1.4 (esercizio 4 dalla prima prova)

Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i piani $\pi_1 \colon 2x + 3y - z = 1$ e $\pi_2 \colon x - 2y + z = 0$; sia r la retta $\pi_1 \cap \pi_2$, e sia A il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determinare:

(a) la direzione $\boldsymbol{d}_r$ della retta r:

(b) le intersezioni di π_1 con gli assi cartesiani:

(c) l'equazione del piano π_0 parallelo a π_1 e passante per l'origine O:

(d) l'equazione cartesiana del piano α parallelo alla retta r e passante per A e per O:

(e) la distanza di π_1 da π_0:

ESERCIZI TUTORATO 3

Esercizio 1 ------ appello 22/1/18, teoria, es. 1.4 (esercizio 4 della prima prova)

Domanda [pianobA] Quale delle seguenti rette è ortogonale al piano π: $x - y + z = 0$?

☐ $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Esercizio 2 ------ appello 23/7/19, teoria, es. 1.3 (esercizio 3 della prima prova)

Domanda 3 Si determini quale fra le seguenti espressioni sono equazioni **cartesiane** del piano π passante per i punti di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

☐ $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + 2t + 2s \quad t, s \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2s \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x - y = 2 \\ z - y = 2 \end{cases}$

☐ $x + y + z = 1$ ☐ $x + y + z = 0$

Esercizio 3 ------ appello 2/7/19, teoria, es. 2.1 (esercizio 1 della seconda prova)

Domanda [spantrevettB] ♣ Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ vettori di uno spazio vettoriale V, e sia $\boldsymbol{u} \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

☐ $\boldsymbol{v}_1 = \alpha\, \boldsymbol{u}$ per un dato $\alpha \in \mathbb{R}$ ☐ $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) < \dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u})$

☐ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}$ sono linearmente indipendenti ☐ $\boldsymbol{u} \notin \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1)$

Esercizio 4 ------ appello 22/9/16, pratica, es. 1.3 (esercizio 3 della prima prova)

3. **(6 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio euclideo e si considerino i punti A di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, B di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e C di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (a) Si determini un'equazione *cartesiana* del piano π passante per A, B e C.

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane della retta r passante per B ortogonale al piano π.

   (c) Si determini la posizione reciproca delle retta r e la retta s passante per A e C.

   (d) Si determini la distanza di C dalla retta r.

Esercizio 5 ------ appello 11/7/18, pratica, es. 2.2 (esercizio 2 della seconda prova)

2. **(8 pt)** Si fissi un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ nello spazio euclideo. Si considerino i punti P_1, P_2 e P_3 di coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2, \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per P_1 e P_2:

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per P_3 e ortogonale a r:

(c) Determinare il punto di intersezione Q di r con π:

(d) Determinare l'angolo fra $\overrightarrow{QP_1}$ e $\overrightarrow{QP_3}$.

ESERCIZI TUTORATO 4

1) Dato il vettore $u = (1,0,1)^T \in R^3$ si consideri l'insieme $V := \{\tilde{X} \in R^3 \mid \tilde{X} \perp \tilde{u}\}$

a) Dimostrare che V è sottospazio di R^3
b) Determinare l'equazione cartesiana di V e una sua base [B_v]
c) Completare la base B_v per ottenere una base di R^3 [B_3]
d) Determinare le coordinate del vettore $\tilde{u}$ nella base calcolata al punto precedente
e) Determinare le componenti del vettore $\tilde{v} \in R^3$ sapendo che $[\ \tilde{v}\ ]_{B_4} = (1,1,1)^T$

2) Dato il sottospazio $V := \{\tilde{X} \in R^4 | x + y + 2t = x + 3z = 0\}$

a) Determinare una base [B_v] per il sottospazio V
b) Determinare Per quai valori di h il vettore $u = (-6, h, 2,2)^T \in V$
c) Completare la base B_v per ottenere una base di R^4 [B_4]
d) Calcolare le coordinate dei vettori della base canonica di R^4 nella base B_4 calcolata al punto precedente

3) Dati il sottospazio $V := \{\tilde{X} \in R^4 | x + y + z = y - t = 0\}$ e i vettori $u_1 = (1,1,1,0)^T$ e $u_2 = (0,1,0,-1)^T$

a) Determinare una base per V [B_v]
b) Determinare le equazioni cartesiane del sottospazio $U := span(u_1, u_2)$
c) Determinare la dimensione dei sottospazi $(V \cap U)$ e $(V + U)$
d) Sia X_1 un vettore qualunque della base B_v (a scelta del candidato) e sia X_2 un qualsiasi vettore appartenente a U , determinare il risultato del prodotto scalare tra X_1 e X_2

ESERCIZI TEORIA PER CASA

Esercizio 1

Domanda [spantrevettC] ♣ Siano $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ vettori di uno spazio vettoriale V, e sia $U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. Quali delle seguenti affermazioni sono **necessariamente** vere?

- ☐ $2\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 - \sqrt{3}\boldsymbol{u}_3 \in U$
- ☐ Se $\boldsymbol{u}_3 \in \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ allora $\dim U = 2$
- ☐ $\dim \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \leq \dim U$
- ☐ $\mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) + \mathrm{Span}(\boldsymbol{u}_3) = U$

Esercizio 2

Domanda [subcoordbB]

Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0 \right\}$ con base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sia $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$.

Quale fra le seguenti affermazioni sulle coordinate di $\boldsymbol{u}$ nella base $\mathcal{B}$ è corretta?

- ☐ $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3

Domanda [determinantetrepertreD] Sia $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & -2 \\ 2k & k & -2 \\ k & k & 1 \end{pmatrix}$ una matrice dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni $k \in \mathbb{R}$.

- ☐ $\det(A_k) = k$
- ☐ $\det(A_k) = k^3$
- ☐ $\det(A_k) = k^2$
- ☐ Nessuna delle precedenti risposte è vera.

Esercizio 4

Domanda 5 ♣ Sia $A = (A^1|A^2|A^3)$ una matrice quadrata 3×3; sapendo che $\det A = -2$ si dica quali delle seguenti uguaglianze sono *sempre* vere:

- ☐ $\det(A^2|A^1|A^3) = 2.$
- ☐ $\det(A^1|A^1 + A^2|A^3) = -2.$
- ☐ $\det(3A) = -6.$
- ☐ $\det(A^1|A^2|2A^3) = -16.$

ESERCIZI TUTORATO 5

Esercizio 1 ------ eserciziario

Esercizio 2.4. (27 novembre 2008, Prova in itinere)
Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \quad x + y = t = 0 \right\} \qquad V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

(1) Determinare una base per U;
(2) determinare un sistema di generatori per $U + V$;
(3) calcolare le dimensioni di $U \cap V$ e $U + V$.

Esercizio 2 ------ eserciziario

Esercizio 2.9. (16 settembre 2008, Appello)

Fissati in $\mathbb{R}^4$ i vettori: $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, si considerino i sottospazi:

$$U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}); \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + 2t = y + z = 0 \right\}.$$

a) Determinare una base per U e V

b) Determinare le equazioni cartesiane di U

c) Determinare la dimensione del sottospazio SOMMA e del sottospazio INTERSEZIONE

d) Determinare le coordinate del vettore w rispetto alla base di U calcolata nel primo punto

Esercizio 3 ------

Si considerino i vettori: $\boldsymbol{v1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})^{\boldsymbol{T}}$; $\boldsymbol{v2} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}}$; $\boldsymbol{v3} = (\mathbf{2}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}, \mathbf{1})^{\boldsymbol{T}}$

a) Determinare la dimensione del sottospazio $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{span}\{\boldsymbol{v1}, \boldsymbol{v2}, \boldsymbol{v3}\}$ al variare del parametro $h \in \boldsymbol{R}$

b) determinare una base per **U** per $\boldsymbol{h} = \mathbf{1}$

c) Determinare le coordinate del vettore $\boldsymbol{w} = \mathbf{2}\boldsymbol{e1} + \boldsymbol{e4}$ nella base trovata al punto precedente

ESERCIZI TUTORATO 6

Esercizio 1 ------

TUTORATO GEOMETRIA:

① ESERCIZIO DI PASSAGGIO

SI CONSIDERI LA LISTA DI VETTORI $[\mathcal{L}]$ E IL VETTORE $[v]$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix} \right\} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-h \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO $U = \mathrm{span}(\mathcal{L})$ AL VARIARE DI h

b) PER QUALI VALORI DI h LA LISTA È UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$.

c) PER QUALI VALORI DI h IL VETTORE $v \in U$

d) POSTO $h = 2$, CALCOLARE $[v]_{\mathcal{L}}$

Esercizi 2 - 3 ------

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) CALCOLARE $\det(A^2)$ E $\det(4A)$

(b) DETERMINARE IL RANGO DI A

(c) CALCOLARE EQUAZIONI CARTESIANE DEL SOTTOSPAZIO $V \subset \mathbb{R}^3$, $V := \mathrm{span}(A \cdot v)$

(d) STABILIRE SE È POSSIBILE CALCOLARE $(w^T \cdot A \cdot v)$ IN CASO AFFERMATIVO CALCOLARE IL RISULTATO DEL PRODOTTO.

---

(3) SI CONSIDERI LA MATRICE A E IL VETTORE b.

$$A = \begin{pmatrix} -k & k-2 & k+2 & k \\ k+1 & 1 & k+3 & 1 \\ k-1 & 2-k & -k & 1-k \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) DETERMINARE IL RANGO DI A AL VARIARE DI K.

(b) PER QUALI VALORI DI K $b \in \mathrm{span}(A_i)$ (A_i = COLONNE DI A)

(c) POSTO $K = 2$, DETERMINARE LE COORDINATE DI b NELLA BASE $\mathcal{B} = \{A_1, A_3\}$

ESERCIZI TUTORATO 7

Esercizi 1 - 2 ------

1. **(6 pt)** Sia $A = \begin{pmatrix} h-1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & h & 1+h & 1 \\ 1 & h & -1 & -(1+h) \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ha soluzione:

   (c) Posto $h = 3$ determinare la soluzione generale del sistema $AX = B$:

   (d) Posto $h = 0$ fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

3. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 & k+1 \\ -(k+1) & k & 1 & k+2 \\ 2(k+1) & 1-k & k+4 & k+4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

ESERCIZI TUTORATO 8

Esercizio 1 ------

3. Si considerino la seguente matrice quadrata A e l vettore B dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & (h-1) & (h-1) & -1 \\ 1 & h & (h-1) & 1 \\ 2 & (h-1) & (2h-2) & h-1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} h-1 \\ 1+h \\ h-1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

(b) Determinare per quali valori di h il sistema lineare non omogeneo $AX = B$ ammette soluzioni:

(c) Posto $h = -1$, determinare una base di $\operatorname{Ker} A$ e risolvere il sistema $AX = B$:

Esercizio 2 -----

1. Si consideri l'applicazione lineare $L \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

(b) Calcolare: $\dim(\operatorname{Im} L) =$ $\qquad \dim(\operatorname{Ker} L) =$ $\qquad L \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} =$

(c) Trovare una base per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

(d) Stabilire se L è suriettiva, giustificando ogni affermazione.

Esercizio 3 ------

1. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ composta dai vettori $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che:

$$L(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Si determini la dimensione di $\ker L$ e $\operatorname{Im} L$ esplicitandone una base:

   (b) Si determini la matrice associata a L rispetto alla base $\mathcal{B}$ in $\mathbb{R}^3$ ed alla base canonica in $\mathbb{R}^2$:

   (c) Si calcolino le coordinate del vettore $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

   (d) Si determini $L(\boldsymbol{e}_1)$:

   (e) Si determini la matrice associata a L rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$: