CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	15 settembre 2020
Cognome e Nome:	Matricola:

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1+k & k & k+2 & 2k-1 & 3k \\ k & -1 & 2k+1 & -3-k & -4-k \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k \\ 1 \\ k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	2	sì	3
-1	2	3	no	–
altrim.	3	3	sì	2

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, -1 \\ 2 \text{ se } k = 0, -1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -1$, $\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k \neq 0, -1$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s, p \in \mathbb{R}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	15 settembre 2020
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 1+k & k-1 & k & 3k-3 & k \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2k-1 & -1 & k-1 & -3-k & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ k+1 \\ 3+k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
0	2	3	no	–
1	2	2	sì	3
altrim.	3	3	sì	2

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq 0, 1 \\ 2 \text{ se } k = 0, 1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq 0$, $\dim \mathrm{Sol} = 2$ per $k \neq 0, 1$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s, p \in \mathbb{R}$$

o anche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ s, p \in \mathbb{R}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**15 settembre 2020**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ **Scrivere in modo <u>LEGGIBILE</u> nome e cognome!** $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & 2k+1 & k+3 & k+1 & 2k+3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1+k & -4-k & 3+2k & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2+2k \\ 1+k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-2	2	3	no	–
-1	2	2	sì	3
altrim.	3	3	sì	2

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq -2, -1 \\ 2 \text{ se } k = -2, -1. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -2$, $\dim \mathrm{Sol} = 3$ per $k = -1$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -7/9 \\ 0 \\ 0 \\ 4/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ s, p \in \mathbb{R}$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**15 settembre 2020**
Cognome e Nome:	**Matricola:**

$\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow\Longrightarrow$ $\boxed{\textbf{Scrivere in modo } \underline{\textbf{LEGGIBILE}} \textbf{ nome e cognome!}}$ $\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow\Longleftarrow$

1. **(8 pt)** Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} 3+2k & k+4 & k+2 & k+3 & 2k+5 \\ -5-k & 2k+5 & -1 & k+2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+k \\ 2+2k \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 3:

   (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	rg A	rg $\tilde{A}$	$S \neq \emptyset$?	dim S
-3	2	3	no	–
-2	2	2	sì	3
altrim.	3	3	sì	2

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 \text{ se } k \neq -2, -3 \\ 2 \text{ se } k = -2, -3. \end{cases}$$

Risolubile per $k \neq -3$, $\dim \mathrm{Sol} = 3$ per $k = -2$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/5 \\ -22/15 \\ 0 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2/5 \\ -1/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; s, p \in \mathbb{R}$$

O anche:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ -22/3 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ s, p \in \mathbb{R}$$
