

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	6 settembre 2018
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Determinare il polinomio caratteristico di A
- Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.
- Determinare una base di ciascun autospazio di A .
- Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A .

Autovalori: $-1, 0, 7$. $V_{-1} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $V_0 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, $V_7 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.
 N esiste.

2. (8pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -k & k^2 & k-1 \\ 5 & 5 & -5 & k+5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Determinare il rango di A al variare di k :
- Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:
- Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2:

- (d) Sia $k = -1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
0	2	3	no	#
1	2	2	sì	2
altrim.	3	3	sì	1

Risolvibile per $k \neq 0$,

$\dim \ker A = 2$ per $k = 0, 1$.

Soluzione per $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

3. (8 pt)

4. (8pt)

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	6 settembre 2018
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Determinare il polinomio caratteristico di A
- Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.
- Determinare una base di ciascun autospazio di A .
- Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A .

Autovalori: 0 doppio, 5 semplice. $V_0 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $V_5 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$.

N non esiste, $B = \text{diag}(0, 0, 5)$.

2. (8pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & -k & -1 - k^2 & k + 1 \\ 6 & -6 & 12 & k - 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Determinare il rango di A al variare di k :
- Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:
- Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 3:

- (d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
5	2	2	sì	2
-1	2	3	no	#
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq -1$,

$\dim \ker A = 3$ per $k \neq 5, -1$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

3. (8pt)

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	6 settembre 2018
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ Scrivere in modo **LEGGIBILE** nome e cognome! ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -10 & 3 & 11 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico di A
- (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.
- (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A .
- (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A .

Autovalori: 0 semplice, 2 doppio. $V_0 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, $V_2 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

N non esiste, $B = \text{diag}(0, 2, 2)$.

2. (8pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2k & k^2 & k-1 \\ 5 & 5 & -5 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di A al variare di k :
- (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2:

- (d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
3	2	3	no	#
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq 3$,

$\dim \ker A = 2$ per $k = 3$.

Soluzione per $k = 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

3. (8pt)

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	6 settembre 2018
Cognome e Nome:	Matricola:

⇒⇒⇒⇒⇒ **Scrivere in modo LEGGIBILE nome e cognome!** ⇐⇐⇐⇐⇐

1. (8 pt) Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico di A
- (b) Determinare gli autovalori di A specificandone molteplicità algebriche e geometriche.
- (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A .
- (d) Discutere se esiste una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è diagonale. In caso positivo esibire la matrice. In caso negativo determinare una matrice B che abbia lo stesso polinomio caratteristico di A ma che non sia simile ad A .

Autovalori: $-2, 0, 5$. $V_{-2} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $V_0 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $V_5 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 13 \\ 19 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$.
 N esiste.

2. (8pt) Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & -k+1 & -2 & k+1 \\ 6 & -6 & 12 & k+5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il rango di A al variare di k :
- (b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:
- (c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 3:

- (d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

k	$\text{rg } A$	$\text{rg } \tilde{A}$	$S \neq \emptyset?$	$\dim S$
-2	2	2	sì	2
0	2	3	no	#
altrim.	3	3	sì	1

Risolubile per $k \neq 0$,

$\dim \ker A = 3$ per $k \neq 0, -2$.

Soluzione per $k = 1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

3. (8pt)
