CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**16 gennaio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:
   $$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Per ciascuno degli autovalori trovati al punto precedente, determinare la molteplicità geometrica.

   (c) Si determinino tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta r passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   (c) Calcolare la distanza di $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ da π.

   (d) Detta Q l'intersezione fra r e π calcolare il prodotto scalare fra i vettori $\overrightarrow{QP_0}$ e $\overrightarrow{QP_2}$.

---

3. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 & k+1 \\ -(k+1) & k & 1 & k+2 \\ 2(k+1) & 1-k & k+4 & k+4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 0$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**16 gennaio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

   (a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:
   $$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Per ciascuno degli autovalori trovati al punto precedente, determinare la molteplicità geometrica.

   (c) Si determinino tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica del piano che ha equazione cartesiana $\pi\colon x - 2y + 2z + 1 = 0$.

   (b) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r ottenuta intersecando π con il piano di equazione $y = 2$.

   (c) Determinare una rappresentazione cartesiana per la retta s che è parallela ad r e passante per $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (d) Calcolare la distanza di $P_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ da π.

---

3. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 1 & k-1 \\ -(k-1) & 1 & k & k \\ 2(k-1) & k+2 & k+7 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 2$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	16 gennaio 2017
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:
   $$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Per ciascuno degli autovalori trovati al punto precedente, determinare la molteplicità geometrica.

   (c) Si determinino tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica e una cartesiana della retta s passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad s e passante per $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   (c) Detta P_3 l'intersezione fra s e π calcolare l'angolo fra i vettori $\overrightarrow{P_3P_0}$ e $\overrightarrow{P_3P_2}$.

   (d) Calcolare la distanza di P_0 da π.

---

3. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 1 & k-2 \\ -(k-2) & 1 & k-3 & k-1 \\ 2(k-2) & k+1 & 4-k & k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k+6 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 3$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**16 gennaio 2017**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. **(8 pt)** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

   (a) Dire quale/i fra i seguenti vettori assegnati sono autovettori di A, precisando il relativo autovalore:
   $$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Per ciascuno degli autovalori trovati al punto precedente, determinare la molteplicità geometrica.

   (c) Si determinino tutti gli autovalori di A con le relative molteplicità algebriche e geometriche:

   (d) Si fornisca una base ortogonale per ciascun autospazio.

---

2. **(8 pt)** Sia $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$ un riferimento cartesiano ortonormale nello spazio.

   (a) Determinare una rappresentazione parametrica del piano che ha equazione cartesiana $\pi\colon x + 3y - 2z + 1 = 0$.

   (b) Determinare una rappresentazione parametrica della retta r ottenuta intersecando π con il piano di equazione $z = 2$.

   (c) Determinare una rappresentazione cartesiana per la retta s che è parallela ad r e passante per $P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (d) Calcolare la distanza di $P_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ da π.

---

3. Si consideri il sistema lineare $AX = B$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ è il vettore delle incognite, A e B sono le seguenti matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A = \begin{pmatrix} k-3 & 0 & -1 & k-3 \\ -(k-3) & 1 & -k+2 & k-2 \\ 2(k-3) & k & -k-5 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5+k \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare il rango di A al variare di k:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Determinare per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2:

(d) Sia $k = 1$. Determinare la dimensione della varietà delle soluzioni e una sua rappresentazione parametrica: