CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 settembre 2014**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale k, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$ delle incognite:

$$A = \begin{pmatrix} -k & k & 2 & k+1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -k^2 & -2k & -4 & k^2-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k-2 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema $AX = B$ è risolubile:

   (c) Determinare per quali valori di k la soluzione ha dimensione 2:

   (d) Posto $k = 1$, fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

   (e) Posto $k = 1$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed il sottospazio $V = \{X \in \mathbb{R}^4 \colon X \perp \boldsymbol{v}\}$.

   (a) Calcolare $\|\boldsymbol{v}\|$ e determinare un versore $\hat{\boldsymbol{v}} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{v})$:

   (b) Calcolare $\dim V$ e $\dim V^{\perp}$:

   (c) Trovare le equazioni cartesiane ed una base per V:

   (d) Trovare una base e le equazioni cartesiane per il sottospazio $V^{\perp}$:

---

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e l'operatore lineare $L_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice A.

   (a) Determinare $\dim \ker L_A$ e $\dim \operatorname{Im} L_A$:

   (b) Determinare una rappesentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L_A$:

   (c) Scrivere in forma estesa il polinomio caratteristico di A:

   (d) Determinare gli autovalori di A esplicitando molteplicità algebriche e geometriche:

   (e) Per ciascun autovalore determinare una base ortogonale del corrispondente autospazio:

   (f) Stabilire se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri la retta r intersezione dei piani $\pi_1 \colon x + y = 0$ e $\pi_2 \colon y + z = 1$. Determinare:

   (a) La direzione della retta r:

   (b) I punti di intersezione di r con il piano coordinato x, y:

   (c) L'equazione cartesiana del piano α perpendicolare a r e passate per l' origine O del riferimento:

   (d) L' equazione del piano β contenente la retta r e l'asse z:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 settembre 2014**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale h, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$ delle incognite:

$$A = \begin{pmatrix} -(h-2) & h-2 & 2 & h-1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -(h-2)^2 & -2(h-2) & -4 & (h-2)^2-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h-4 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ è risolubile:

   (c) Determinare per quali valori di h la soluzione ha dimensione 2:

   (d) Posto $h = 1$, fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

   (e) Posto $h = 1$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed il sottospazio $V = \{X \in \mathbb{R}^4 \colon X \perp \boldsymbol{v}\}$.

   (a) Calcolare $\|\boldsymbol{v}\|$ e determinare un versore $\hat{\boldsymbol{v}} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{v})$:

   (b) Calcolare $\dim V$ e $\dim V^{\perp}$:

   (c) Trovare le equazioni cartesiane ed una base per V:

   (d) Trovare una base e le equazioni cartesiane per il sottospazio $V^{\perp}$:

---

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e l'operatore lineare $L_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice A.

   (a) Determinare $\dim \ker L_A$ e $\dim \operatorname{Im} L_A$:

   (b) Determinare una rappesentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L_A$:

   (c) Scrivere in forma estesa il polinomio caratteristico di A:

   (d) Determinare gli autovalori di A esplicitando molteplicità algebriche e geometriche:

   (e) Per ciascun autovalore determinare una base ortogonale del corrispondente autospazio:

   (f) Stabilire se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri la retta r intersezione dei piani $\pi_1 \colon y + z = 0$ e $\pi_2 \colon x + z = 1$. Determinare:

   (a) La direzione della retta r:

   (b) I punti di intersezione di r con il piano coordinato y, z:

   (c) L'equazione cartesiana del piano α perpendicolare a r e passate per l' origine O del riferimento:

   (d) L' equazione del piano β contenente la retta r e l'asse z:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 settembre 2014
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale k, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$ delle incognite:

$$A = \begin{pmatrix} -k & 2 & k & k+1 \\ -k^2 & -4 & -2k & k^2-2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k-2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema $AX = B$ è risolubile:

   (c) Determinare per quali valori di k la soluzione ha dimensione 2:

   (d) Posto $k = -1$, fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

   (e) Posto $k = -1$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ed il sottospazio $V = \{X \in \mathbb{R}^4 : X \perp \boldsymbol{v}\}$.

   (a) Calcolare $\|\boldsymbol{v}\|$ e determinare un versore $\hat{\boldsymbol{v}} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{v})$:

   (b) Calcolare $\dim V$ e $\dim V^\perp$:

   (c) Trovare le equazioni cartesiane ed una base per V:

   (d) Trovare una base e le equazioni cartesiane per il sottospazio $V^\perp$:

---

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e l'operatore lineare $L_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice A.

   (a) Determinare $\dim \ker L_A$ e $\dim \operatorname{Im} L_A$:

   (b) Determinare una rappesentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L_A$:

   (c) Scrivere in forma estesa il polinomio caratteristico di A:

   (d) Determinare gli autovalori di A esplicitando molteplicità algebriche e geometriche:

   (e) Per ciascun autovalore determinare una base ortogonale del corrispondente autospazio:

   (f) Stabilire se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri la retta r intersezione dei piani $\pi_1 \colon x - y = 0$ e $\pi_2 \colon y - z = -1$. Determinare:

   (a) La direzione della retta r:

   (b) I punti di intersezione di r con il piano coordinato x, y:

   (c) L'equazione cartesiana del piano α perpendicolare a r e passate per l' origine O del riferimento:

   (d) L' equazione del piano β contenente la retta r e l'asse z:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 settembre 2014
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale h, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$ delle incognite:

$$A = \begin{pmatrix} -(h-2) & h-2 & 2 & h-1 \\ (h-2)^2 & 2(h-2) & 4 & 2-(h-2)^2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4-h \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ è risolubile:

   (c) Determinare per quali valori di h la soluzione ha dimensione 2:

   (d) Posto $h = -1$, fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

   (e) Posto $h = -1$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ed il sottospazio $V = \{X \in \mathbb{R}^4 \colon X \perp \boldsymbol{v}\}$.

   (a) Calcolare $\|\boldsymbol{v}\|$ e determinare un versore $\hat{\boldsymbol{v}} \in \operatorname{Span}(\boldsymbol{v})$:

   (b) Calcolare $\dim V$ e $\dim V^{\perp}$:

   (c) Trovare le equazioni cartesiane ed una base per V:

   (d) Trovare una base e le equazioni cartesiane per il sottospazio $V^{\perp}$:

---

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e l'operatore lineare $L_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice A.

   (a) Determinare $\dim \ker L_A$ e $\dim \operatorname{Im} L_A$:

   (b) Determinare una rappesentazione cartesiana per $\operatorname{Im} L_A$:

   (c) Scrivere in forma estesa il polinomio caratteristico di A:

   (d) Determinare gli autovalori di A esplicitando molteplicità algebriche e geometriche:

   (e) Per ciascun autovalore determinare una base ortogonale del corrispondente autospazio:

   (f) Stabilire se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri la retta r intersezione dei piani $\pi_1 \colon y + z = 0$ e $\pi_2 \colon x + y = 1$. Determinare:

   (a) La direzione della retta r:

   (b) I punti di intersezione di r con il piano coordinato y, z:

   (c) L'equazione cartesiana del piano α perpendicolare a r e passate per l' origine O del riferimento:

   (d) L' equazione del piano β contenente la retta r e l'asse z:
