

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 settembre 2014
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Rispondere *correttamente e completamente* ad almeno 4 richieste:

1. Spiegare cosa vuol dire che una funzione $L : V \rightarrow W$, non necessariamente lineare, è **iniettiva**.

-
2. Stabilire quando un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^4$ di matrice A è suriettiva.

-
3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 5. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false.

- (a) V contiene esattamente 5 vettori. sì no
- (b) Una lista di generatori di V deve contenere esattamente 5 vettori. sì no
- (c) È possibile costruire una lista di generatori di V che contenga 10 vettori.
sì no
- (d) È possibile costruire una lista di vettori indipendenti in V che contenga 10 vettori. sì no

-
4. Produrre un esempio di un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
-

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$. Calcolare A^{-1} .

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & k \end{pmatrix}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere o false.

- (a) A è simmetrica solo per $k = 1$. sì no
- (b) A è simmetrica per $k = 0$. sì no
- (c) Non ci sono valori di k per cui A è simmetrica. sì no
- (d) Per qualunque valore di k A è simmetrica. sì no
-

7. Sia A matrice 3×3 di rango 2 e si supponga che $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è vera o falsa.

- (a) 0 è autovalore di A . sì no
- (b) l'autospazio V_0 ha dimensione 2. sì no
- (c) l'autospazio V_0 ha equazioni $x - z = y - z = 0$. sì no
- (d) $\det A \neq 0$. sì no
-

8. Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio di dimensione ≥ 1 . Spiegare quando i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono una base ortogonale di V ? Esiste sempre una tale base? Perché?

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 settembre 2014
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Rispondere *correttamente e completamente* ad almeno 4 richieste:

1. Spiegare cosa vuol dire che una funzione $L : V \rightarrow W$, non necessariamente lineare, è **suriettiva**.

2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 6. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) Una lista di generatori di V deve contenere almeno 6 vettori. sì no

(b) V contiene esattamente 6 vettori. sì no

(c) È possibile costruire una lista di generatori di V che contenga 5 vettori.
sì no

(d) È possibile costruire una lista di vettori indipendenti in V che contenga 5 vettori. sì no

3. Stabilire, motivando la risposta, quando l'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^n$ di matrice A è **iniettiva**.

4. Fornire un esempio di una matrice **simmetrica** di ordine 3 che non sia diagonale.

5. Sia $A = (A^{(1)}|A^{(2)}|A^{(3)})$ una matrice 3×3 e si supponga che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si stabilisca quali tra le seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) A è necessariamente la matrice nulla. sì no

(b) $\det A = 0$ sì no

(c) $A^{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_3$. sì no

(d) $A^{(3)} = A^{(1)} + 2A^{(2)}$. sì no

6. Sia A una matrice $n \times n$. Quando A viene detta **ortogonale**? Enunciare, inoltre, una **condizione necessaria e sufficiente** sulle colonne A^1, \dots, A^n di A affinché la matrice A sia ortogonale.

7. Sia A matrice 3×3 di rango 1 e si supponga che $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è vera o falsa.

(a) A è invertibile. sì no

(b) X è autovettore di A con autovalore 0. sì no

(c) l'autospazio V_0 ha dimensione 2. sì no

(d) l'autospazio V_0 ha equazioni $x - y = x - z = 0$. sì no

8. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Sapendo che $\det A = 1$, calcolare i seguenti determinanti:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \quad ; \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \quad ; \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \quad .$$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 settembre 2014
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Rispondere *correttamente e completamente* ad almeno 4 richieste:

1. Spiegare cosa vuol dire che un'applicazione $L : V \rightarrow W$, non necessariamente lineare, è **iniettiva**.

2. Stabilire quando un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^n$ di matrice A è suriettiva.

3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 7. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false.

- (a) V contiene esattamente 7 vettori. sì no
- (b) Una lista di generatori di V deve contenere esattamente 7 vettori. sì no
- (c) È possibile costruire una lista di vettori indipendenti in V che contenga 8 vettori. sì no
- (d) È possibile costruire una lista di generatori di V che contenga 8 vettori.
sì no

4. Produrre un esempio di un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$. Calcolare A^{-1} .

6. Sia $A = \begin{pmatrix} h & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere o false.

- (a) A è simmetrica solo per $h = 2$. sì no
- (b) A è simmetrica per $h = 0$. sì no
- (c) Non ci sono valori di h per cui A è simmetrica. sì no
- (d) Per qualunque valore di h A è simmetrica. sì no

7. Sia A matrice 3×3 di rango 2 e si supponga che $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è vera o falsa.

- (a) $\det A = 0$. sì no
- (b) l'autospazio V_0 ha dimensione 2. sì no
- (c) 0 è autovalore di A . sì no
- (d) l'autospazio V_0 ha equazioni $x - z = y + 2z = 0$. sì no

8. Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio di dimensione ≥ 1 . Spiegare quando i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono una base ortonormale di V ? Esiste sempre una tale base? Perché?

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 settembre 2014
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Rispondere *correttamente e completamente* ad almeno 4 richieste:

1. Spiegare cosa vuol dire che un'applicazione $L : V \rightarrow W$, non necessariamente lineare, è **suriettiva**.

2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 8. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) È possibile costruire una lista di generatori di V che contenga 8 vettori. sì no

(b) È possibile costruire una lista di vettori indipendenti in V che contenga 6 vettori. sì no

(c) Una lista di generatori di V deve contenere almeno 6 vettori. sì no

(d) V contiene esattamente 8 vettori. sì no

3. Stabilire, motivando la risposta, quando l'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^5$ di matrice A è **iniettiva**.

4. Fornire un esempio di una matrice **ortogonale** di ordine 3 che non sia l'identità.

5. Sia $A = (A^{(1)}|A^{(2)}|A^{(3)})$ una matrice 3×3 e si supponga che $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si stabilisca quali tra le seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) $\det A \neq 0$ sì no

(b) A è necessariamente la matrice nulla. sì no

(c) $A^{(2)} = A^{(1)} + A^{(3)}$. sì no

(d) $A^8 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_3$. sì no

6. Sia A una matrice $n \times n$. Quando A viene detta simmetrica? fra le colonne A^1, \dots, A^n e le righe A_1, \dots, A_n di A affinché la matrice A sia simmetrica.

7. Sia A matrice 3×3 di rango 1 e si supponga che $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si stabilisca se è vera o falsa.

(a) X è autovettore di A con autovalore 0. sì no

(b) l'autospazio V_0 ha dimensione 1. sì no

(c) A non è invertibile. sì no

(d) l'autospazio V_0 ha equazioni $x + y + z = 0$. sì no

8. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Sapendo che $\det A = -1$, calcolare i seguenti determinanti:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \quad ; \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \quad ; \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \quad .$$
