CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 luglio 2014
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Rispondere *correttamente e completamente* ad almeno 4 richieste:

1. Siano V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ vettori di V. Definire l'insieme U seguente e spiegare a quale condizione $\boldsymbol{u} \in U$:

$$U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n).$$

---

2. Si consideri il sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - 2y + z = 0$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono corrette oppure no:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ generano V: sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di V: sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di V: sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ genera V: sì ◯ no ◯

---

3. Si determini per quali valori di m è possibile costruire un'applicazione lineare suriettiva $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$, motivando la risposta.

---

4. Definire il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$ fra due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$, ed enunciarne le proprietà.

---

5. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$, quando A si dice ortogonale? Stabilire quali fra le seguenti matrici sono ortogonali:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

---

6. Sia $AX = B$ un sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite. Stabilire, motivando la risposta se il sistema può ammettere un'*unica* soluzione.

---

7. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ una matrice t.c. $A^{\mathrm{T}} = A$; sia $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$ con $X \in \mathbb{R}^2$ la forma quadratica associata ad A. Per ciascuna delle matrici riportate di seguito, dire se è possibile oppure no trovare un vettore X tale che $q(X) = -1$:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. sì ◯ no ◯

---

8. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Per ciascuna delle matrici riportate di seguito, dire se $\lambda = 1$ è autovalore di A oppure no:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. sì ◯ no ◯

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 luglio 2014
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale k, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$ delle incognite:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1+k & 1 & k-1 \\ 0 & 2 & 2 & k \\ -k & k-2 & 2k-2 & 4-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 2-k/2 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema $AX = B$ è risolubile:

   (c) Determinare per quali valori di k la soluzione ha dimensione 1:

   (d) Posto $k = 1$, fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

   (e) Posto $k = 1$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano $\pi\colon x + 2y + z = 0$ e il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Rappresentare in forma cartesiana la retta per A ortogonale a π:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π' per A parallelo a π:

   (c) Determinare la proiezione ortogonale A' del punto A su π:

   (d) Determinare la distanza tra i piani π e π':

   (e) Determinare l'area del triangolo OAA':

---

3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A esplicitando molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Per ciascun autovalore determinare una base ortogonale del corrispondente autospazio.

(c) Stabilire se A e B sono simili (motivare la risposta).

(d) Si consideri la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$. Stabilire il segno di Q.

(e) Determinare una matrice ortogonale M tale che $M^{\mathrm{T}}AM$ sia diagonale.

---

4. Si consideri l'applicazione lineare $L_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere le equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} L_A$:

(b) Determinare una base ortogonale per $\operatorname{Im} L_A$:

(c) Scrivere le equazioni cartesiane per il complemento ortogonale W di $\operatorname{Im} L_A$:

(d) Scrivere equazioni parametriche per $\operatorname{Ker} L_A$:

(e) Dire se i sottospazi W e $\operatorname{Ker} L_A$ coincidono o meno, motivando la risposta:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 luglio 2014
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base di V. Spiegare che cosa le coordinate di un vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

---

2. Si consideri il sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x - 2y + z = y - z = 0$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \right\}$ generano V: sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ generano V: sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ genera V: sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di V: sì ◯ no ◯

---

3. Si determini per quali valori di k è possibile costruire un'applicazione lineare iniettiva $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^k$, motivando la risposta.

---

4. Fissato in $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare standard, sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio non nullo. Definire il complemento ortogonale di V.

---

5. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$, quando A si dice simmetrica? Stabilire quali fra le seguenti matrici sono simmetriche:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

6. Sia $AX = B$ un sistema lineare di 5 equazioni in 3 incognite. Stabilire, motivando la risposta se il sistema può ammettere un'*unica* soluzione.

---

7. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ una matrice t.c. $A^{\mathrm{T}} = A$; sia $q(X) = X^{\mathrm{T}} A\, X$ con $X \in \mathbb{R}^2$ la forma quadratica associata ad A. Per ciascuna delle matrici riportate di seguito, dire se è possibile oppure no trovare un vettore X tale che $q(X) = 2$:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. sì ◯ no ◯

   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

   (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

   (d) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

---

8. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Per ciascuna delle matrici riportate di seguito, dire se $\lambda = 3$ è autovalore di A oppure no:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

   (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. sì ◯ no ◯

   (c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

   (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**11 luglio 2014**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale h, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$ delle incognite:

$$A = \begin{pmatrix} 3+h & h+2 & 1 & h+1 \\ 2 & 0 & 2 & h+2 \\ h & -(2+h) & 2(h+1) & 2-h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} h+2 \\ 2 \\ 1-h/2 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ è risolubile:

   (c) Determinare per quali valori di h la soluzione ha dimensione 2:

   (d) Posto $h = 1$, fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

   (e) Posto $h = 1$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano $\pi\colon 2x + y + z = 0$ e il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Rappresentare in forma cartesiana la retta per A ortogonale a π:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π' per A parallelo a π:

   (c) Determinare la proiezione ortogonale A' del punto A su π:

   (d) Determinare la distanza tra i piani π e π':

   (e) Determinare l'area del triangolo OAA':

---

3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 4 & 20 & -2 \\ 8 & -2 & 17 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A esplicitando molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Per ciascun autovalore determinare una base ortogonale del corrispondente autospazio.

(c) Stabilire se A e B sono simili (motivare la risposta).

(d) Si consideri la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$. Stabilire il segno di Q.

(e) Determinare una matrice ortogonale M tale che $M^{\mathrm{T}}AM$ sia diagonale.

---

4. Si consideri l'applicazione lineare $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} L_A$:

(b) Determinare una base ortogonale per $\operatorname{Im} L_A$:

(c) Scrivere equazioni cartesiane per il complemento ortogonale W di $\operatorname{Im} L_A$:

(d) Scrivere equazioni parametriche per $\operatorname{Ker} L_A$:

(e) Dire se i sottospazi W e $\operatorname{Ker} L_A$ coincidono o meno, motivando la risposta:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 luglio 2014
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Rispondere *correttamente e completamente* ad almeno 4 richieste:

1. Definire il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$ fra due vettori $X, Y \in \mathbb{R}^n$, ed enunciarne le proprietà.

---

2. Siano V uno spazio vettoriale e $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ vettori di V. Definire l'insieme U seguente e spiegare a quale condizione $\boldsymbol{u} \in U$:

$$U = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n).$$

---

3. Si consideri il sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y + 2z = 0$. Stabilire se le seguenti affermazioni sono corrette oppure no:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera V: sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di V: sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di V: sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ generano V: sì ◯ no ◯

---

4. Si determini per quali valori di p è possibile costruire un'applicazione lineare suriettiva $L\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^p$, motivando la risposta.

---

5. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$, quando A si dice ortogonale? Stabilire quali fra le seguenti matrici sono ortogonali:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

---

6. Sia $AX = B$ un sistema lineare di 4 equazioni in 5 incognite. Stabilire, motivando la risposta se il sistema può ammettere un'*unica* soluzione.

---

7. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Per ciascuna delle matrici riportate di seguito, dire se $\lambda = -1$ è autovalore di A oppure no:

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. sì ◯ no ◯

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

---

8. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ una matrice t.c. $A^{\mathrm{T}} = A$; sia $q(X) = X^{\mathrm{T}} A X$ con $X \in \mathbb{R}^2$ la forma quadratica associata ad A. Per ciascuna delle matrici riportate di seguito, dire se è possibile oppure no trovare un vettore X tale che $q(X) = -2$:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. sì ◯ no ◯

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**11 luglio 2014**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale k, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$ delle incognite:

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & -(3+k) & 1 & k+1 \\ k+2 & k & -2(k+1) & k-2 \\ 0 & -2 & 2 & k+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+2 \\ k/2-1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di k:

   (b) Determinare per quali valori di k il sistema $AX = B$ è risolubile:

   (c) Determinare per quali valori di k la soluzione ha dimensione 1:

   (d) Posto $k = 1$, fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

   (e) Posto $k = 1$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano $\pi\colon x + y + 2z = 0$ e il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Rappresentare in forma cartesiana la retta per A ortogonale a π:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π' per A parallelo a π:

   (c) Determinare la proiezione ortogonale A' del punto A su π:

   (d) Determinare la distanza tra i piani π e π':

   (e) Determinare l'area del triangolo OAA':

---

3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A esplicitando molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Per ciascun autovalore determinare una base ortogonale del corrispondente autospazio.

(c) Stabilire se A e B sono simili (motivare la risposta).

(d) Si consideri la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}} AX$. Stabilire il segno di Q.

(e) Determinare una matrice ortogonale M tale che $M^{\mathrm{T}} AM$ sia diagonale.

---

4. Si consideri l'applicazione lineare $L_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere le equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} L_A$:

(b) Determinare una base ortogonale per $\operatorname{Im} L_A$:

(c) Scrivere le equazioni cartesiane per il complemento ortogonale W di $\operatorname{Im} L_A$:

(d) Scrivere equazioni parametriche per $\operatorname{Ker} L_A$:

(e) Dire se i sottospazi W e $\operatorname{Ker} L_A$ coincidono o meno, motivando la risposta:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	11 luglio 2014
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Siano V uno spazio vettoriale e $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base di V. Spiegare che cosa le coordinate di un vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

---

2. Si consideri il sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $x - y + 2z = x - z = 0$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$ generano V: sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di V: sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di V: sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ generano V: sì ◯ no ◯

---

3. Si determini per quali valori di q è possibile costruire un'applicazione lineare iniettiva $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^q$, motivando la risposta.

---

4. Fissato in $\mathbb{R}^n$ il prodotto scalare standard, sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio non nullo. Definire il complemento ortogonale di V.

---

5. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(n)$, quando A si dice simmetrica? Stabilire quali fra le seguenti matrici sono simmetriche:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

6. Sia $AX = B$ un sistema lineare di 4 equazioni in 3 incognite. Stabilire, motivando la risposta se il sistema può ammettere un'*unica* soluzione.

---

7. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ una matrice t.c. $A^{\mathrm{T}} = A$; sia $q(X) = X^{\mathrm{T}} A\, X$ con $X \in \mathbb{R}^2$ la forma quadratica associata ad A. Per ciascuna delle matrici riportate di seguito, dire se è possibile oppure no trovare un vettore X tale che $q(X) = 1$:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. sì ◯ no ◯

   (c) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

   (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

---

8. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$. Per ciascuna delle matrici riportate di seguito, dire se $\lambda = 2$ è autovalore di A oppure no:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. sì ◯ no ◯

   (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

   (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

   (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; sì ◯ no ◯

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**11 luglio 2014**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino la matrice A ed il vettore B in funzione del parametro reale h, ed il vettore $X \in \mathbb{R}^4$ delle incognite:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h-3 & h-1 & h-5 \\ 2 & 0 & 4 & h-3 \\ h-5 & 3-h & h-7 & 11-h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} h-3 \\ 4 \\ (11-h)/2 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il rango di A al variare di h:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ è risolubile:

   (c) Determinare per quali valori di h la soluzione ha dimensione 2:

   (d) Posto $h = 1$, fornire una base di $\operatorname{Ker} A$:

   (e) Posto $h = 2$, scrivere una rappresentazione parametrica per la varietà lineare delle soluzioni:

---

2. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano $\pi \colon x - 2y + z = 0$ e il punto $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Rappresentare in forma cartesiana la retta per A ortogonale a π:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π' per A parallelo a π:

   (c) Determinare la proiezione ortogonale A' del punto A su π:

   (d) Determinare la distanza tra i piani π e π':

   (e) Determinare l'area del triangolo OAA':

---

3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & -8 \\ -4 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare gli autovalori di A esplicitando molteplicità algebriche e geometriche.

(b) Per ciascun autovalore determinare una base ortogonale del corrispondente autospazio.

(c) Stabilire se A e B sono simili (motivare la risposta).

(d) Si consideri la forma quadratica $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$. Stabilire il segno di Q.

(e) Determinare una matrice ortogonale M tale che $M^{\mathrm{T}}AM$ sia diagonale.

---

4. Si consideri l'applicazione lineare $L_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere le equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} L_A$:

(b) Determinare una base ortogonale per $\operatorname{Im} L_A$:

(c) Scrivere le equazioni cartesiane per il complemento ortogonale W di $\operatorname{Im} L_A$:

(d) Scrivere equazioni parametriche per $\operatorname{Ker} L_A$:

(e) Dire se i sottospazi W e $\operatorname{Ker} L_A$ coincidono o meno, motivando la risposta:
