CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**23 giugno 2014**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Rispondere *correttamente* e *completamente* ad almeno 4 richieste:

1. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ vettori di V. Che cosa significa che i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ sono un sistema di generatori di V?

---

2. Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare e sia

$$\operatorname{Im} L = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 3z = x + y = 0 \}.$$

Stabilire se L è iniettiva, motivando la risposta.

---

3. Si consideri la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Sia X il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate rispetto a tale base sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si determini X.

---

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; stabilire quali dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A, precisandone l'autovalore associato:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

5. Sia A una matrice 4×5 e sia $B \subset A$ la sottomatrice quadrata ottenuta cancellando la prima colonna ($B = (A^2|\dots|A^5)$); sia inoltre $\det B \neq 0$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni possono essere dedotte giustificando la risposta.

   (a) Le colonne di A sono linearmente dipendenti. sì ◯ no ◯

   (b) Le colonne di B sono linearmente dipendenti. sì ◯ no ◯

   (c) Le colonne di A sono linearmente indipendenti. sì ◯ no ◯

   (d) Le colonne di B sono linearmente indipendenti. sì ◯ no ◯

---

6. Siano $L\colon V \to V$ un operatore lineare di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n, e $\alpha \in \mathbb{R}$ un autovalore di L. Definire l'autospazio V_α.

---

7. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio V di equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono una *base ortogonale* di V.

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

---

8. Sia A matrice simmetrica 2×2 e si supponga che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia autovettore di A. È possibile determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A senza avere altre informazioni? In caso affermativo, trovare una base come richiesto.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 giugno 2014
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Rispondere *correttamente* e *completamente* ad almeno 4 richieste:

1. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ vettori di V. Che cosa significa che i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ sono una base di V?

---

2. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un' applicazione lineare e sia
$$\operatorname{Ker} L = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 3z = 0 \}.$$
Stabilire se L è suriettiva, motivando la risposta.

---

3. Si consideri la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$. Scrivere il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ che ha coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

---

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; stabilire quali dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A, precisandone l'autovalore associato:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

5. Sia A una matrice 3×4 e sia $A' \subset A$ la sottomatrice ottenuta cancellando l'ultima colonna; sia inoltre $\det A' = 0$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni possono essere dedotte, giustificando la risposta.

   (a) $\operatorname{rg} A < 3$; sì ◯ no ◯
   (b) $\operatorname{rg} A \leq 2$; sì ◯ no ◯
   (c) $\operatorname{rg} A = 2$; sì ◯ no ◯
   (d) $\operatorname{rg} A' \leq 2$. sì ◯ no ◯

---

6. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Come è definita la somma dei sottospazi $U + W$?

---

7. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_2 - x_4 = 0$. Stabilire se i seguenti insiemi sono una base ortogonale di V:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. sì ◯ no ◯

---

8. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 tale che il suo polinomio caratteristico sia $p_A(t) = (2-t)(t^2+4)$. Determinare gli autovalori di A. Stabilire se é possibile che A sia diagonalizzabile motivando la risposta.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**23 giugno 2014**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare e sia
$$\operatorname{Im} L = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y - 3z = 0 \}.$$
Stabilire se L è iniettiva, motivando la risposta.

---

2. Sia A una matrice 4×5 e sia $B \subset A$ la sottomatrice quadrata ottenuta cancellando la quinta colonna ($B = (A^1|\dots|A^4)$); sia inoltre $\det B \neq 0$. Stabilire quali delle seguenti affermazioni possono essere dedotte, giustificando la risposta.
   (a) Le colonne di B sono linearmente dipendenti. sì ◯ no ◯
   (b) Le colonne di A sono linearmente dipendenti. sì ◯ no ◯
   (c) Le colonne di A sono linearmente indipendenti. sì ◯ no ◯
   (d) Le colonne di B sono linearmente indipendenti. sì ◯ no ◯

---

3. Siano $L\colon V \to V$ un operatore lineare di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n, e $\alpha \in \mathbb{R}$ un autovalore di L. Definire l'autospazio V_α.

---

4. Si consideri la base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Sia X il vettore di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate rispetto a tale base sono $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si determini X.

---

5. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ vettori di V. Che cosa significa che i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ sono un sistema di generatori di V?

---

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; stabilire quali dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A, precisandone l'autovalore associato:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

7. Sia A matrice simmetrica 2×2 e si supponga che $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia autovettore di A. È possibile determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A senza avere altre informazioni? In caso affermativo, trovare una base come richiesto.

---

8. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio V di equazione $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$. Stabilire se i seguenti insiemi di vettori sono una *base ortogonale* di V.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. sì ◯ no ◯

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**23 giugno 2014**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Rispondere ***correttamente*** **e** ***completamente*** **ad almeno 4 richieste**:

1. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; stabilire quali dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono autovettori di A, precisandone l'autovalore associato:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

2. Siano U e W due sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Come è definita la somma dei sottospazi $U+W$?

---

3. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un' applicazione lineare e sia
$$\operatorname{Ker} L = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + y + 3z = x - y = 0 \}.$$
Stabilire se L è suriettiva, motivando la risposta.

---

4. Sia A una matrice 4×3 e sia $A' \subset A$ la sottomatrice ottenuta cancellando l'ultima riga; sia inoltre $\det A' = 0$. Stabilire quali delle seguenti possono essere dedotte, giustificando la risposta.
   (a) $\operatorname{rg} A' = 2$; sì ◯ no ◯
   (b) $\operatorname{rg} A' \leq 2$; sì ◯ no ◯
   (c) $\operatorname{rg} A = 2$; sì ◯ no ◯
   (d) $\operatorname{rg} A < 3$. sì ◯ no ◯

---

5. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = x_1 - x_3 = 0$. Stabilire se i seguenti insiemi sono una base ortogonale di V:

   (a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; sì ◯ no ◯

   (d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. sì ◯ no ◯

---

6. Siano V uno spazio vettoriale reale e $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ vettori di V. Che cosa significa che i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ sono una base di V?

---

7. Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice quadrata 3×3 tale che il suo polinomio caratteristico sia $p_A(t) = (t+1)(t^2+2)$. Determinare gli autovalori di A. Stabilire se é possibile che A sia diagonalizzabile motivando la risposta.

---

8. Si consideri la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$. Scrivere il vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
