CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	18 settembre 2013
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Considerare l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-t \\ 2x+5y+z-t \\ x+y-z-2t \end{pmatrix} \qquad \text{ed il vettore} \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $L(\boldsymbol{u})$:

   (b) Scrivere la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche del dominio e codominio:

   (c) Determinare una base per $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Determinare una base per $\operatorname{Im} L$ e una sua rappresentazione cartesiana:

   (e) Dire per quale/i valore/i di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4-2h \\ h \\ -4-h \\ h^2 \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Ker} L$.

---

2. Si consideri il seguente sistema $A\,X = B$ dipendente dal parametro reale h

$$\begin{cases} hx + y - z = 1 \\ 2x + (h-1)y + hz + t = 2 \\ (2-h)x + (h-2)y + (1+h)z + h^2 t = h\,. \end{cases}$$

   Determinare:

   (a) il rango della matrice dei coefficienti A al variare di h:

   (b) per quali valori di h il sistema è risolubile:

   (c) la dimensione della varietà delle soluzioni al variare di h:

   (d) posto $h = 0$, la soluzione generale del sistema:

---

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

   (a) Scrivere il polinomio $p_A(t)$ caratteristico di A ordinato secondo le potenze decrescenti di t:

   (b) Determinare tutti gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche:

   (c) Determinare le equazioni cartesiane e una base di ciascun autospazio di A:

   (d) Discutere la diagonalizzabilità della matrice A.

---

4. Considerare il sottospazio vettoriale

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{ed il vettore} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim U^{\perp} =$

   (b) Fornire una rappresentazione cartesiana di U:

   (c) Trovare una base ortonormale di U:

   (d) Trovare una base di $U^{\perp}$:

   (e) Determinare il vettore $\boldsymbol{v}_{\parallel}$, proiezione ortogonale di $\boldsymbol{v}$ su U.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano $\pi\colon x + 2y - z = 0$ e il punto $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Rappresentare in forma cartesiana la retta $r = OA$:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π' per A parallelo a π:

   (c) Determinare l'intersezione P del piano π' con l'asse Oz:

   (d) Determinare la proiezione ortogonale A' del punto A su π:

   (e) Determinare l'area del triangolo OAA':

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	18 settembre 2013
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro reale h:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ h^2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} h-1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare al variare di h la dimensione del sottospazio $V = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5)$.

2. Stabilire per quali valori di h i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5\}$ sono generatori di $\mathbb{R}^4$.

3. Stabilire per quali valori di h i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ sono linearmente dipendenti:

4. Posto $h = 2$, si determinino le coordinate di $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**18 settembre 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Considerare l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ y-z \\ 2x+5y+z \\ x+y+2z \end{pmatrix} \qquad \text{ed il vettore} \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $L(\boldsymbol{u})$:

   (b) Scrivere la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche del dominio e codominio:

   (c) Determinare una base per $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Determinare una base per $\operatorname{Im} L$ e una sua rappresentazione cartesiana:

   (e) Dire per quale/i valore/i di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3-h \\ 2h-2 \\ h^2 \\ 5-3h \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$:

---

2. Si consideri il seguente sistema $A\,X = B$ dipendente dal parametro reale h

$$\begin{cases} (1+h)x + y - z = 2+h \\ (1-h)x + (h-1)y + (2+h)z + (1+h)^2 t = 1 \\ 2x + hy + (1+h)z + t = 1\,. \end{cases}$$

   Determinare:

   (a) il rango della matrice dei coefficienti A al variare di h:

   (b) per quali valori di h il sistema è risolubile:

   (c) la dimensione della varietà delle soluzioni al variare di h:

   (d) posto $h=1$, la soluzione generale del sistema:

---

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Scrivere il polinomio $p_A(t)$ caratteristico di A ordinato secondo le potenze decrescenti di t:

   (b) Determinare tutti gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche:

   (c) Determinare le equazioni cartesiane e una base di ciascun autospazio di A:

   (d) Discutere la diagonalizzabilità della matrice A.

---

4. Considerare il sottospazio vettoriale

$$U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{ed il vettore} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\dim U =$ $\qquad$ $\dim U^{\perp} =$

   (b) Fornire una rappresentazione cartesiana di U:

   (c) Trovare una base ortonormale di U:

   (d) Trovare una base di $U^{\perp}$:

   (e) Determinare il vettore $\boldsymbol{v}_{\parallel}$, proiezione ortogonale di $\boldsymbol{v}$ su U.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano $\pi\colon x - y + 2z = 0$ e il punto $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Rappresentare in forma cartesiana la retta $r = OA$:

   (b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π' per A parallelo a π:

   (c) Determinare l'intersezione P del piano π' con l'asse Oz:

   (d) Determinare la proiezione ortogonale A' del punto A su π:

   (e) Determinare l'area del triangolo OAA':

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**18 settembre 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro reale h:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ h^2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ h-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare al variare di h la dimensione del sottospazio $V = \text{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5)$.

2. Stabilire per quali valori di h i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5\}$ sono generatori di $\mathbb{R}^4$.

3. Stabilire per quali valori di h i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ sono linearmente dipendenti:

4. Posto $h = 2$, si determinino le coordinate di $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$.