CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 luglio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) La matrice associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$:

(b) $\dim \operatorname{Im} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Ker} L =$

(c) Le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

(d) Stabilire per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3h \\ h^2 \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$.

---

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ -2x + (k-1)y - z = k \\ (5+k)x + y + (4+k)z = 3\,. \end{cases}$$

(a) Si determini per quali valori di k il sistema è risolubile:

(b) Si determini per quali valori di k la soluzione è unica:

(c) Posto $k = 0$, si determini la soluzione generale del sistema:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A:

(b) Determinare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

(c) Determinare la dimenzione di ciascun autospazio in funzione di a:

(d) Stabilire per quali valori di a la matrice è diagonalizzabile:

(e) Stabilire per quali valori di a esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano π di equazione $x + y - 2z = 1$ ed il punto $A = (1, 0, 1)$. Determinare:

   (a) Le intersezioni $Q_x\, Q_y$ e Q_z del piano π con gli assi coordinati Ox, Oy e Oz, rispettivamente.

   (b) Le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A ed ortogonale al piano π:

   (c) Le equazioni cartesiane della retta $s = Q_x\, Q_y$.

   (d) Le distanze δ_1 tra π ed A, e δ_2 fra s ed A.

---

5. Sia $V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

   (a) $\dim V =$ $\qquad\qquad$ $\dim V^{\perp} =.$

   (b) Si determini una base ortogonale di V

   (c) Si determini una base di $V^{\perp}$.

   (d) Si determini per quale valore di a il vettore $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a V.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	9 luglio 2013
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice simmetrica e si consideri la forma quadratica definita dalla matrice A:

$$Q\colon \mathbb{R}^3 \to R, \quad Q(X) = X^T A X, \quad X \in \mathbb{R}^3.$$

Sapendo che la matrice A ammette gli autovalori -1 e 2 e che l'autospazio V_2 ha equazione $x + y - 2z = 0$, si risponda ai quesiti seguenti.

1. Scrivere il polinomio caratteristico di A:

2. Determinare l'equazione dell'autospazio associato all'autovalore -1:

3. Scrivere una forma canonica per la forma quadratica Q:

4. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 luglio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, e $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) La matrice associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$:

(b) $\dim \operatorname{Im} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Ker} L =$

(c) Le equazioni cartesiane e una base di $\operatorname{Ker} L$:

(d) Stabilire per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}2h\\-2h\\3-h^2\\0\end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Ker} L$.

---

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ -x + (k-2)y - 2z = k - 1 \\ (3+k)x + y + (4+k)z = 3\,. \end{cases}$$

- Si determini per quali valori di k il sistema è risolubile:
- Si determini per quali valori di k la soluzione è unica:
- Posto $k = 1$, si determini la soluzione generale del sistema:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & b^2-1\\ 1 & 0 & b-1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A:

(b) Determinare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

(c) Determinare la dimensione di ciascun autospazio in funzione di b:

(d) Stabilire per quali valori di b la matrice è diagonalizzabile:

(e) Stabilire per quali valori di b esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano π di equazione $x - y + 3z = 1$ ed il punto $A = (1, 2, 0)$. Determinare:

   (a) Le intersezioni Q_x Q_y e Q_z del piano π con gli assi coordinati Ox, Oy e Oz, rispettivamente.

   (b) Le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A ed ortogonale al piano π:

   (c) Le equazioni cartesiane della retta $s = Q_x Q_y$.

   (d) Le distanze δ_1 tra π ed A, e δ_2 fra s ed A.

---

5. Sia $V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

   (a) $\dim V =$ $\qquad\qquad$ $\dim V^{\perp} =$.

   (b) Si determini una base ortogonale di V

   (c) Si determini una base di $V^{\perp}$.

   (d) Si determini per quale valore di a il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ appartiene a V.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 luglio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice simmetrica e si consideri la forma quadratica definita dalla matrice A:

$$Q\colon \mathbb{R}^3 \to R, \quad Q(X) = X^T AX, \quad X \in \mathbb{R}^3.$$

Sapendo che la matrice A ammette gli autovalori 1 e -2 e che l'autospazio V_1 ha equazione $x - y = 2x + z = 0$, si risponda ai quesiti seguenti.

1. Scrivere il polinomio caratteristico di A:
2. Determinare l'equazione dell'autospazio associato all'autovalore -2:
3. Scrivere una forma canonica per la forma quadratica Q:
4. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 luglio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) La matrice associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$:

(b) $\dim \operatorname{Im} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Ker} L =$

(c) Le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

(d) Stabilire per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3h \\ h^2 \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Im} L$.

---

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ (k-1)x - 2y - z = k \\ x + (5+k)y + (4+k)z = 3\,. \end{cases}$$

(a) Si determini per quali valori di k il sistema è risolubile:

(b) Si determini per quali valori di k la soluzione è unica:

(c) Posto $k = 0$, si determini la soluzione generale del sistema:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -a \\ 2 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A:

(b) Determinare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

(c) Determinare la dimenzione di ciascun autospazio in funzione di a:

(d) Stabilire per quali valori di a la matrice è diagonalizzabile:

(e) Stabilire per quali valori di a esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano π di equazione $2x + y - z = 1$ ed il punto $A = (1, 1, 0)$. Determinare:

   (a) Le intersezioni Q_x Q_y e Q_z del piano π con gli assi coordinati Ox, Oy e Oz, rispettivamente.

   (b) Le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A ed ortogonale al piano π:

   (c) Le equazioni cartesiane della retta $s = Q_x\, Q_y$.

   (d) Le distanze δ_1 tra π ed A, e δ_2 fra s ed A.

---

5. Sia $V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

   (a) $\dim V =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\dim V^{\perp} =.$

   (b) Si determini una base ortogonale di V

   (c) Si determini una base di $V^{\perp}$.

   (d) Si determini per quale valore di a il vettore $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a V.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 luglio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice simmetrica e si consideri la forma quadratica definita dalla matrice A:

$$Q\colon \mathbb{R}^3 \to R, \quad Q(X) = X^T AX, \quad X \in \mathbb{R}^3.$$

Sapendo che la matrice A ammette gli autovalori 3 e 2 e che l'autospazio V_2 ha equazione $x + 2y - z = 0$, si risponda ai quesiti seguenti.

1. Scrivere il polinomio caratteristico di A:
2. Determinare l'equazione dell'autospazio associato all'autovalore 3:
3. Scrivere una forma canonica per la forma quadratica Q:
4. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 luglio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, e $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) La matrice associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$:

(b) $\dim \operatorname{Im} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Ker} L =$

(c) Le equazioni cartesiane e una base di $\operatorname{Ker} L$:

(d) Stabilire per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -3h \\ 3h \\ 0 \\ h^2 - 4 \end{pmatrix}$ appartiene a $\operatorname{Ker} L$.

---

2. Si consideri il seguente sistema dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ -2x + (k-4)y - z = k - 3 \\ (2+k)x + y + (1+k)z = 3\,. \end{cases}$$

- Si determini per quali valori di k il sistema è risolubile:
- Si determini per quali valori di k la soluzione è unica:
- Posto $k = 3$, si determini la soluzione generale del sistema:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & b^2 - 1 \\ 2 & 0 & 1 + b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A:

(b) Determinare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

(c) Determinare la dimensione di ciascun autospazio in funzione di b:

(d) Stabilire per quali valori di b la matrice è diagonalizzabile:

(e) Stabilire per quali valori di b esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano π di equazione $x + 3y + z = 1$ ed il punto $A = (1, 0, -2)$. Determinare:

   (a) Le intersezioni Q_x Q_y e Q_z del piano π con gli assi coordinati Ox, Oy e Oz, rispettivamente.

   (b) Le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A ed ortogonale al piano π:

   (c) Le equazioni cartesiane della retta $s = Q_x\, Q_y$.

   (d) Le distanze δ_1 tra π ed A, e δ_2 fra s ed A.

---

5. Sia $V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

   (a) $\dim V =$ $\qquad\qquad$ $\dim V^{\perp} =.$

   (b) Si determini una base ortogonale di V

   (c) Si determini una base di $V^{\perp}$.

   (d) Si determini per quale valore di a il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3-a \end{pmatrix}$ appartiene a V.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**9 luglio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(3)$ una matrice simmetrica e si consideri la forma quadratica definita dalla matrice A:

$$Q\colon \mathbb{R}^3 \to R, \quad Q(X) = X^T AX, \quad X \in \mathbb{R}^3.$$

Sapendo che la matrice A ammette gli autovalori 1 e 4 e che l'autospazio V_1 ha equazione $x - z = 2x + y = 0$, si risponda ai quesiti seguenti.

1. Scrivere il polinomio caratteristico di A:

2. Determinare l'equazione dell'autospazio associato all'autovalore 4:

3. Scrivere una forma canonica per la forma quadratica Q:

4. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:
