CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 giugno 2013
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri la seguente applicazione $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay^2 \\ x - z + 2y \\ x + y - b + 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

   (a) Stabilire per quali valori di a e b L è un'applicazione lineare.
   Per i valori di a e b trovati:

   (b) Scrivere la matrice associata a L nella base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$:

   (c) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

   (d) Stabilire se L è iniettiva e/o suriettiva.

   (e) Sia $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, determinare la dimensione e una base per il sottospazio $L(U)$:

---

2. Si consideri il sistema lineare $A\,X = B$ seguente:

$$\begin{cases} (h-1)\,x + h\,y + z + 2h\,t = -1 \\ (1-2h)\,x + y + 2h\,z + (2+h)\,t = 2 + h \\ h\,x + h\,y + h\,t = h \end{cases}$$

   con $h \in \mathbb{R}$.

   (a) Determinare il rango della matrice dei coefficienti A al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quale/i valore/i di h la dimensione della varietà lineare delle soluzioni è 2:

   (d) Risolvere il sistema per $h = 2$:

---

3. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Si stabilisca quale/i fra i seguenti vettori sono autovettori specificando il corrispondente autovalore:
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
   (b) Si calcolino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Per ciascun autospazio di A si determino le equazioni cartesiane ed una base.

   (d) Si stabilisca se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano π di equazione $x - 2y + 3z = 1$. Determinare:

   (a) Le coordinate del punto A di intersezione di π con l'asse z:

   (b) Una rappresentazione cartesiana per la retta r intersezione del piano π con il piano y, z:

   (c) La direzione della retta r:

   (d) L'equazione del piano σ per A perpendicolare a r:

   (e) Una rappresentazione cartesiana per la retta s contenuta nel piano π, passante per A e perpendicolare a r:

---

5. Si consideri la forma quadratica
$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz$$
   (a) Si determini la matrice rappresentativa Q della forma quadratica.

   (b) Si determini la forma canonica di q.
$$q(x', y', z') =$$
   (c) Si determini la matrice ortogonale M di cambiamento di base
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : M =$$
   (d) Si determini il segno della forma quadratica associata alla matrice $Q + I_3$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 giugno 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2. Si considerino l'insieme

$$U = \left\{ A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \,|\, A = (A^1|A^2) : \quad A^1 + 2A^2 = \mathbf{0} \right\}.$$

ed il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Mostrare che U è un sottospazio di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

   Sia $A \in U$ una matrice non nulla.

2. Verificare che il vettore $\boldsymbol{v}$ è autovettore di A.

3. Verificare che $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ e determinare l'equazione di $\operatorname{Ker} A$.

4. Verificare che per ogni $B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$, si ha $BA \in U$.

5. Sia $B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$, verificare che si ha $AB \in U$ se e solo se il vettore $\boldsymbol{v}$ è autovettore di B.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 giugno 2013
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri la seguente applicazione $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + a - 1 \\ x - z + 2y \\ x + z - 2y + bxy \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

   (a) Stabilire per quali valori di a e b L è un'applicazione lineare.
   Per i valori di a e b trovati:

   (b) Scrivere la matrice associata a L nella base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$:

   (c) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

   (d) Stabilire se L è iniettiva e/o suriettiva.

   (e) Sia $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, determinare la dimensione e una base per il sottospazio $L(U)$:

---

2. Si consideri il sistema lineare $A\,X = B$ seguente:

$$\begin{cases} -(1+2h)\,x + (3+h)\,y + 2(1+h)\,z + t = 1 \\ h\,x + 2(1+h)\,y + \ z + (1+h)\,t = 2 + h \\ (1+h)\,x + (1+h)\,y + (1+h)\,t = 1 + h \end{cases}$$

   con $h \in \mathbb{R}$.

   (a) Determinare il rango della matrice dei coefficienti A al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quale/i valore/i di h la dimensione della varietà lineare delle soluzioni è 2:

   (d) Risolvere il sistema per $h = 1$:

---

3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Si stabilisca quale/i fra i seguenti vettori sono autovettori specificando il corrispondente autovalore:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) Si calcolino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

(c) Per ciascun autospazio di A si determino le equazioni cartesiane ed una base.

(d) Si stabilisca se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano π di equazione $x - 2y + 3z = 1$. Determinare:

(a) Le coordinate del punto A di intersezione di π con l'asse y:

(b) Una rappresentazione cartesiana per la retta r intersezione del piano π con il piano x, y:

(c) La direzione della retta r:

(d) L'equazione del piano σ per A perpendicolare a r:

(e) Una rappresentazione cartesiana per la retta s contenuta nel piano π, passante per A e perpendicolare a r:

---

5. Si consideri la forma quadratica

$$q(x, y, z) = 4z^2 - 4xy - 4xz + 4yz$$

(a) Si determini la matrice rappresentativa Q della forma quadratica.

(b) Si determini la forma canonica di q.

$$q(x', y', z') =$$

(c) Si determini la matrice ortogonale M di cambiamento di base

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : M =$$

(d) Si determini il segno della forma quadratica associata alla matrice $Q + 2I_3$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 giugno 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2. Si considerino l'insieme

$$U = \left\{ A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} : \quad A_1 + 3A_2 = \mathbf{0} \right\}.$$

ed il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Mostrare che U è un sottospazio di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

   Sia $A \in U$ una matrice non nulla.

2. Verificare che il vettore $\boldsymbol{v}$ è perpendicolare alle colonne di A.
3. Verificare che $\dim \operatorname{Im} A = 1$ e determinare l'equazione di $\operatorname{Im} A$.
4. Verificare che per ogni $B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$, si ha $AB \in U$.
5. Sia $B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$, verificare che si ha $BA \in U$ se e solo se il vettore $\boldsymbol{v}$ è autovettore di B^{T}.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	19 giugno 2013
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si consideri la seguente applicazione $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax^2 + y \\ 2x - z + y \\ x + y - b + 2 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

   (a) Stabilire per quali valori di a e b L è un'applicazione lineare.
   Per i valori di a e b trovati:

   (b) Scrivere la matrice associata a L nella base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$:

   (c) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

   (d) Stabilire se L è iniettiva e/o suriettiva.

   (e) Sia $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, determinare la dimensione e una base per il sottospazio $L(U)$:

---

2. Si consideri il sistema lineare $A\,X = B$ seguente:

$$\begin{cases} h\,x + (h-1)\,y + z + 2h\,t = 1 \\ x + (1-2h)y + 2h\,z + (2+h)\,t = 2 - h \\ h\,x + h\,y + h\,t = h \end{cases}$$

   con $h \in \mathbb{R}$.

   (a) Determinare il rango della matrice dei coefficienti A al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quale/i valore/i di h la dimensione della varietà lineare delle soluzioni è 2:

   (d) Risolvere il sistema per $h = 2$:

---

3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Si stabilisca quale/i fra i seguenti vettori sono autovettori specificando il corrispondente autovalore:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (b) Si calcolino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Per ciascun autospazio di A si determino le equazioni cartesiane ed una base.

   (d) Si stabilisca se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano π di equazione $2x - y + 3z = 1$. Determinare:

   (a) Le coordinate del punto A di intersezione di π con l'asse z:

   (b) Una rappresentazione cartesiana per la retta r intersezione del piano π con il piano y, z:

   (c) La direzione della retta r:

   (d) L'equazione del piano σ per A perpendicolare a r:

   (e) Una rappresentazione cartesiana per la retta s contenuta nel piano π, passante per A e perpendicolare a r:

---

5. Si consideri la forma quadratica

$$q(x, y, z) = 5x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 4yz$$

   (a) Si determini la matrice rappresentativa Q della forma quadratica.

   (b) Si determini la forma canonica di q.

$$q(x', y', z') =$$

   (c) Si determini la matrice ortogonale M di cambiamento di base

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : M =$$

   (d) Si determini il segno della forma quadratica associata alla matrice $Q - I_3$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 giugno 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2. Si considerino l'insieme

$$U = \left\{ A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \,|\, A = (A^1|A^2) : \quad 3A^1 - A^2 = \mathbf{0} \right\}.$$

ed il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Mostrare che U è un sottospazio di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

   Sia $A \in U$ una matrice non nulla.

2. Verificare che il vettore $\boldsymbol{v}$ è autovettore di A.
3. Verificare che $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ e determinare l'equazione di $\operatorname{Ker} A$.
4. Verificare che per ogni $B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$, si ha $BA \in U$.
5. Sia $B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$, verificare che si ha $AB \in U$ se e solo se il vettore $\boldsymbol{v}$ è autovettore di B.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 giugno 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri la seguente applicazione $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + a - 2 \\ 2x - z + y \\ -2x + y + z + bxy \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

   (a) Stabilire per quali valori di a e b L è un'applicazione lineare.
   Per i valori di a e b trovati:

   (b) Scrivere la matrice associata a L nella base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$:

   (c) Calcolare la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

   (d) Stabilire se L è iniettiva e/o suriettiva.

   (e) Sia $U = \operatorname{Span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)$, determinare la dimensione e una base per il sottospazio $L(U)$:

---

2. Si consideri il sistema lineare $A\,X = B$ seguente:

$$\begin{cases} (3+h)\,x - (1+2h)\,y + 2(1+h)\,z + t = h - 1 \\ 2(1+h)\,x + h\,y + \ z + (1+h)\,t = h \\ (1+h)\,x + (1+h)\,y + (1+h)\,t = 1 + h \end{cases}$$

   con $h \in \mathbb{R}$.

   (a) Determinare il rango della matrice dei coefficienti A al variare di $h \in \mathbb{R}$:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

   (c) Determinare per quale/i valore/i di h la dimensione della varietà lineare delle soluzioni è 2:

   (d) Risolvere il sistema per $h = 1$:

---

3. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
   (a) Si stabilisca quale/i fra i seguenti vettori sono autovettori specificando il corrispondente autovalore:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
   (b) Si calcolino gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

   (c) Per ciascun autospazio di A si determino le equazioni cartesiane ed una base.

   (d) Si stabilisca se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si consideri il piano π di equazione $y - 2x + 3z = 1$. Determinare:
   (a) Le coordinate del punto A di intersezione di π con l'asse y:

   (b) Una rappresentazione cartesiana per la retta r intersezione del piano π con il piano x, y:

   (c) La direzione della retta r:

   (d) L'equazione del piano σ per A perpendicolare a r:

   (e) Una rappresentazione cartesiana per la retta s contenuta nel piano π, passante per A e perpendicolare a r:

---

5. Si consideri la forma quadratica
$$q(x, y, z) = 4x^2 - 4yz - 4xz + 4xy$$
   (a) Si determini la matrice rappresentativa Q della forma quadratica.

   (b) Si determini la forma canonica di q.
$$q(x', y', z') =$$
   (c) Si determini la matrice ortogonale M di cambiamento di base
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : M =$$
   (d) Si determini il segno della forma quadratica associata alla matrice $Q + 3I_3$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**19 giugno 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2. Si considerino l'insieme

$$U = \left\{ A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} : \quad 2A_1 - A_2 = \mathbf{0} \right\}.$$

ed il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Mostrare che U è un sottospazio di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$.

   Sia $A \in U$ una matrice non nulla.

2. Verificare che il vettore $\boldsymbol{v}$ è perpendicolare alle colonne di A.
3. Verificare che $\dim \operatorname{Im} A = 1$ e determinare l'equazione di $\operatorname{Im} A$.
4. Verificare che per ogni $B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$, si ha $AB \in U$.
5. Sia $B \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$, verificare che si ha $BA \in U$ se e solo se il vettore $\boldsymbol{v}$ è autovettore di B^{T}.