CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	5 aprile 2013
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-z \\ y+z \\ 2x+y-z \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) La matrice associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$:

(b) $\dim \operatorname{Im} L =$ $\qquad$ $\dim \operatorname{Ker} L =$

(c) Le equazioni cartesiane di $\operatorname{Im} L$:

(d) Stabilire se L è iniettiva o suriettiva.

---

2. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & h & 2+h \\ h-1 & 0 & -2 \\ h & h & h \end{pmatrix}$, il vettore $B = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $h \in \mathbb{R}$, e si indichi con X un vettore di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare il rango di A al variare di $h \in \mathbb{R}$:

(b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

(c) Risolvere il sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ per $h = 2$:

(d) Calcolare, al variare di h, la dimensione del sottospazio V delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$, e stabilire se esistono valori di h per i quali il sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ammette SOLO la soluzione banale:

---

3. Si consideri la matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere il polinomio caratteristico di A:

(b) Determinare gli autovalori di A con relative molteplicità algebriche:

(c) Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ le molteplicità geometriche degli autovalori di A:

(d) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ A è simile alla matrice $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano π di equazione $2x - y + z = 0$ ed il punto $A = (1, 0, 1)$. Determinare:

(a) La direzione normale al piano π:

(b) Le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A ed ortogonale al piano π:

(c) L' equazione cartesiana del piano α parallelo a π e passante per A:

(d) La distanza tra i piani π e α:

---

5. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino i sottospazi

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \colon x + z = y = 0 \right\} \quad U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Determinare:

(a) $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim V =$

(b) Una base ortogonale di V:

(c) $\dim U \cap V =$ $\qquad\qquad$ $\dim U + V =$

(d) Le equazioni cartesiane del complemento ortogonale di V:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**5 aprile 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio, fornendo dettagli dei passaggi risolutivi:

Si consideri la matrice A quadrata 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare: $\det A$, $\det(A^3)$, $\det(-2A)$.
2. Stabilire se qualcuno dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ è autovettore di A.
3. Calcolare il polinomio caratteristico di A.
4. Sia $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ la forma quadratica definita dalla matrice A. Determinare l'espressione polinomiale di $Q(X)$.
5. Stabilire il segno della forma quadratica $Q(X)$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**5 aprile 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ x+z+t \\ y+2t \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) La matrice associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$:

(b) $\dim \operatorname{Im} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Ker} L =$

(c) Una base per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

(d) Stabilire se L è iniettiva o suriettiva.

---

2. Si considerino la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & k+3 \\ k & 0 & -2 \\ k+1 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$, il vettore $B = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, e si indichi con X un vettore di $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare il rango di A al variare di $k \in \mathbb{R}$:

(b) Determinare per quali valori di k il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

(c) Risolvere il sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ per $k = 2$:

(d) Calcolare, al variare di k, la dimensione del sottospazio V delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$, e stabilire se esistono valori di k per i quali il sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ammette SOLO la soluzione banale:

---

3. Si consideri la matrice reale quadrata di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1+a & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Scrivere il polinomio caratteristico di A:

   (b) Determinare gli autovalori di A con relative molteplicità algebriche:

   (c) Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ le molteplicità geometriche degli autovalori di A:

   (d) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ A è simile alla matrice $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano π di equazione $x - 2y + z = 0$ ed il punto $A = (0, 1, 1)$. Determinare:

   (a) La direzione normale al piano π:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto A ed ortogonale al piano π:

   (c) L' equazione cartesiana del piano α parallelo a π e passante per A:

   (d) La distanza tra i piani π e α:

---

5. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino i sottospazi

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \colon x + y - t = 0 \right\} \quad U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

   Determinare:

   (a) $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim V =$

   (b) Una base ortogonale di V:

   (c) $\dim U \cap V =$ $\qquad\qquad$ $\dim U + V =$

   (d) Le equazioni cartesiane del complemento ortogonale di V:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	5 aprile 2013
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio, fornendo dettagli dei passaggi risolutivi:

Si consideri la matrice A quadrata 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare: $\det A$, $\det(A^{-1})$, $\det(-3A^T)$.
2. Stabilire se qualcuno dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ è autovettore di A.
3. Calcolare il polinomio caratteristico di A.
4. Sia $Q(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ la forma quadratica definita dalla matrice A. Determinare l'espressione polinomiale di $Q(X)$.
5. Stabilire il segno della forma quadratica $Q(X)$.