CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	8 febbraio 2013
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{e siano } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3, \text{ e } \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

(b) una base $\mathcal{B}_K$ di $\operatorname{Ker} L$, completandola per avere una base $\mathcal{B}_4$ di $\mathbb{R}^4$:

(c) le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}_4}$ di $\boldsymbol{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_4$ trovata:

(d) la rappresentazione cartesiana di $\operatorname{Im} L$:

---

2. Si consideri il seguente sistema lineare, dipendente dal parametro h:

$$\begin{cases} x - 2y - (2+h)z - ht = 1 + h \\ -2x + y + (1+2h)z + (3-h)t = -2 \\ x + hy + (h-2)t = 1 + 2h \end{cases}$$

Si determini:

(a) il rango della matrice dei coefficienti A al variare di h:

(b) per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

(c) Per quali valori di h lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) La soluzione generale del sistema per $h = 2$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche:

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane di ciascun autospazio, e si scriva una base per ciascuno di essi:

   (c) Si determini la dimensione del sottospazio ottenuto sommando tutti gli autospazi:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e la retta $r\colon x - y - z = 2x + y - 1 = 0$.

   Determinare:

   (a) la direzione di r:

   (b) l'equazione cartesiana del piano π contenente r ed A:

   (c) le intersezioni Q_1, Q_2 e Q_3 del piano π con gli assi coordinati

   (d) la distanza di π da O:

   (e) l'area $\mathcal{A}$ del triangolo $Q_1Q_2Q_3$:

---

5. Considerare la matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e sia } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3.$$

   Determinare:

   (a) l'espressione esplicita della forma quadratica $Q(x, y, z) = X^{\mathrm{T}} S\, X$:

   (b) gli autovalori della matrice S:

   (c) il segno della forma quadratica Q:

   (d) un cambio di variabile $X = NX'$ che consenta di scrivere Q in forma canonica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	8 febbraio 2013
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2. Si consideri l'insieme

$$U = \left\{ M \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid M^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

e il vettore di $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

1. Mostrare che U è un sottospazio di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$.
2. Determinare la dimensione di U e una sua base.
3. Sia $L\colon \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \to \mathbb{R}^2$ definita in questo modo: per $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ poniamo $L(A) = A\boldsymbol{u}$. Mostrare che L è lineare.
4. Trovare la condizione per a, b affinché $\operatorname{Ker} L = U$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	8 febbraio 2013
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{e siano } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3, \text{ e } \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

(b) una base $\mathcal{B}_C$ di $\operatorname{Im} L$, completandola per avere una base $\mathcal{B}_4$ di $\mathbb{R}^4$:

(c) le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}_4}$ di $\boldsymbol{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_4$ trovata:

(d) la rappresentazione cartesiana di $\operatorname{Ker} L$:

---

2. Si consideri il seguente sistema lineare, dipendente dal parametro k:

$$\begin{cases} (2+k)y + z + (1+k)t = 5 + 2k \\ (5+2k)x + y - 2z - (1+k)t = -2 \\ (4+k)x + 2y - z + (1+k)t = -(3+k) \end{cases}$$

Si determini:

(a) il rango della matrice dei coefficienti A al variare di k:

(b) per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) La soluzione generale del sistema per $k = 0$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche:

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane di ciascun autospazio, e si scriva una base per ciascuno di essi:

   (c) Si determini la dimensione del sottospazio ottenuto sommando tutti gli autospazi:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il punto $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e la retta $r\colon x - z - 1 = x + y + 2z = 0$.

   Determinare:

   (a) la direzione di r:

   (b) l'equazione cartesiana del piano π contenente r ed A:

   (c) le intersezioni Q_1, Q_2 e Q_3 del piano π con gli assi coordinati

   (d) la distanza di π da O:

   (e) l'area $\mathcal{A}$ del triangolo $Q_1Q_2Q_3$:

---

5. Considerare la matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e sia } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3.$$

   Determinare:

   (a) l'espressione esplicita della forma quadratica $Q(x, y, z) = X^{\mathrm{T}} S\, X$:

   (b) gli autovalori della matrice S:

   (c) il segno della forma quadratica Q:

   (d) un cambio di variabile $X = NX'$ che consenta di scrivere Q in forma canonica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 febbraio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia A una matrice quadrata di ordine 3 tale che i vettori seguenti

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siano autovettori di A con relativi autovalori

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -1.$$

1. Scrivere il polinomio caratteristico di A.
2. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.
3. Posto $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcolare $A\boldsymbol{u}$:
4. Determinare la matrice A.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 febbraio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \text{ e siano } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3, \text{ e } \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

(b) una base $\mathcal{B}_K$ di $\operatorname{Ker} L$, completandola per avere una base $\mathcal{B}_4$ di $\mathbb{R}^4$:

(c) le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}_4}$ di $\boldsymbol{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_4$ trovata:

(d) la rappresentazione cartesiana di $\operatorname{Im} L$:

---

2. Si consideri il seguente sistema lineare, dipendente dal parametro h:

$$\begin{cases} x - hy - (2+h)t = 1 - 2h \\ 2x - y + (2h-1)z - (3+h)t = 2 \\ x - 2y + (h-2)z + ht = 1 - h \end{cases}$$

Si determini:

(a) il rango della matrice dei coefficienti A al variare di h:

(b) per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

(c) Per quali valori di h lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) La soluzione generale del sistema per $h = 1$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche:

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane di ciascun autospazio, e si scriva una base per ciascuno di essi:

   (c) Si determini la dimensione del sottospazio ottenuto sommando tutti gli autospazi:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e la retta $r\colon y - x - z = 2y + x - 1 = 0$.

   Determinare:

   (a) la direzione di r:

   (b) l'equazione cartesiana del piano π contenente r ed A:

   (c) le intersezioni Q_1, Q_2 e Q_3 del piano π con gli assi coordinati

   (d) la distanza di π da O:

   (e) l'area $\mathcal{A}$ del triangolo $Q_1Q_2Q_3$:

---

5. Considerare la matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ e sia } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3.$$

   Determinare:

   (a) l'espressione esplicita della forma quadratica $Q(x, y, z) = X^{\mathrm{T}} S\, X$:

   (b) gli autovalori della matrice S:

   (c) il segno della forma quadratica Q:

   (d) un cambio di variabile $X = NX'$ che consenta di scrivere Q in forma canonica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 febbraio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e sia $A = Y\,W^{\mathrm{T}}$.

1. Si determini l'ordine ed il rango della matrice A.
2. Si verifichi che se $\boldsymbol{u}$ è un vettore ortogonale a W allora risulta $A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.
3. Si dimostri che Y è autovettore di A, determinandone l'autovalore corrispondente.
4. Si determini una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 febbraio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e siano } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3, \text{ e } \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

(b) una base $\mathcal{B}_C$ di $\operatorname{Im} L$, completandola per avere una base $\mathcal{B}_4$ di $\mathbb{R}^4$:

(c) le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}_4}$ di $\boldsymbol{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_4$ trovata:

(d) la rappresentazione cartesiana di $\operatorname{Ker} L$:

---

2. Si consideri il seguente sistema lineare, dipendente dal parametro k:

$$\begin{cases} (k-2)y - z + (k-1)t = 2k-5 \\ (4-k)x + 2y - z + (1-k)t = k-3 \\ (5-2k)x + y - 2z + (k-1)t = -2 \end{cases}$$

Si determini:

(a) il rango della matrice dei coefficienti A al variare di k:

(b) per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) La soluzione generale del sistema per $k = 3$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche:

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane di ciascun autospazio, e si scriva una base per ciascuno di essi:

   (c) Si determini la dimensione del sottospazio ottenuto sommando tutti gli autospazi:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, e la retta $r\colon y - z - 1 = x + y + 2z = 0$.

   Determinare:

   (a) la direzione di r:

   (b) l'equazione cartesiana del piano π contenente r ed A:

   (c) le intersezioni Q_1, Q_2 e Q_3 del piano π con gli assi coordinati

   (d) la distanza di π da O:

   (e) l'area $\mathcal{A}$ del triangolo $Q_1Q_2Q_3$:

---

5. Considerare la matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e sia } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3.$$

   Determinare:

   (a) l'espressione esplicita della forma quadratica $Q(x, y, z) = X^{\mathrm{T}} S\, X$:

   (b) gli autovalori della matrice S:

   (c) il segno della forma quadratica Q:

   (d) un cambio di variabile $X = NX'$ che consenta di scrivere Q in forma canonica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 febbraio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2. Si consideri l'insieme

$$U = \left\{ M \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

e il vettore di $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

1. Mostrare che U è un sottospazio di $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$.
2. Determinare la dimensione di U e una sua base.
3. Sia $L\colon \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2) \to \mathbb{R}^2$ definita in questo modo: per $A \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}(2)$ poniamo $L(A) = A\boldsymbol{u}$. Mostrare che L è lineare.
4. Trovare la condizione per a, b affinché $\operatorname{Ker} L = U$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 febbraio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{e siano } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3, \text{ e } \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

(b) una base $\mathcal{B}_K$ di $\operatorname{Ker} L$, completandola per avere una base $\mathcal{B}_4$ di $\mathbb{R}^4$:

(c) le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}_4}$ di $\boldsymbol{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_4$ trovata:

(d) la rappresentazione cartesiana di $\operatorname{Im} L$:

---

2. Si consideri il seguente sistema lineare, dipendente dal parametro h:

$$\begin{cases} -2x + y + (3-2h)z + (2+h)t = -2 \\ x - 2y + (h-3)z + (h-1)t = 3 - 2h \\ x + (1-h)y - (1+h)t = 2 - h \end{cases}$$

Si determini:

(a) il rango della matrice dei coefficienti A al variare di h:

(b) per quali valori di h il sistema ammette soluzioni:

(c) Per quali valori di h lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) La soluzione generale del sistema per $h = -1$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche:

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane di ciascun autospazio, e si scriva una base per ciascuno di essi:

   (c) Si determini la dimensione del sottospazio ottenuto sommando tutti gli autospazi:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e la retta $r\colon z - y - x = 2z + y - 1 = 0$.

   Determinare:

   (a) la direzione di r:

   (b) l'equazione cartesiana del piano π contenente r ed A:

   (c) le intersezioni Q_1, Q_2 e Q_3 del piano π con gli assi coordinati

   (d) la distanza di π da O:

   (e) l'area $\mathcal{A}$ del triangolo $Q_1Q_2Q_3$:

---

5. Considerare la matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e sia } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3.$$

   Determinare:

   (a) l'espressione esplicita della forma quadratica $Q(x, y, z) = X^{\mathrm{T}} S\, X$:

   (b) gli autovalori della matrice S:

   (c) il segno della forma quadratica Q:

   (d) un cambio di variabile $X = NX'$ che consenta di scrivere Q in forma canonica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 febbraio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia A una matrice quadrata di ordine 3 tale che i vettori seguenti

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

siano autovettori di A con relativi autovalori

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 1.$$

1. Scrivere il polinomio caratteristico di A.
2. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.
3. Posto $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcolare $A\boldsymbol{u}$:
4. Determinare la matrice A.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 febbraio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{e siano } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3, \text{ e } \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) la dimensione di $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

(b) una base $\mathcal{B}_C$ di $\operatorname{Im} L$, completandola per avere una base $\mathcal{B}_4$ di $\mathbb{R}^4$:

(c) le coordinate $[\boldsymbol{u}]_{\mathcal{B}_4}$ di $\boldsymbol{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_4$ trovata:

(d) la rappresentazione cartesiana di $\operatorname{Ker} L$:

---

2. Si consideri il seguente sistema lineare, dipendente dal parametro k:

$$\begin{cases} (7-2k)x + y - 2z + (k-2)t = -2 \\ (3-k)y + z + (2-k)t = 5 - 2k \\ (5-k)x + 2y - z + (2-k)t = k - 3 \end{cases}$$

Si determini:

(a) il rango della matrice dei coefficienti A al variare di k:

(b) per quali valori di k il sistema ammette soluzioni:

(c) Per quali valori di k lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1:

(d) La soluzione generale del sistema per $k = 1$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4: $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche:

   (b) Si determinino le equazioni cartesiane di ciascun autospazio, e si scriva una base per ciascuno di essi:

   (c) Si determini la dimensione del sottospazio ottenuto sommando tutti gli autospazi:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il punto $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e la retta $r\colon z - x - 1 = z + y + 2x = 0$.

   Determinare:

   (a) la direzione di r:

   (b) l'equazione cartesiana del piano π contenente r ed A:

   (c) le intersezioni Q_1, Q_2 e Q_3 del piano π con gli assi coordinati

   (d) la distanza di π da O:

   (e) l'area $\mathcal{A}$ del triangolo $Q_1Q_2Q_3$:

---

5. Considerare la matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ e sia } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ un vettore generico di } \mathbb{R}^3.$$

   Determinare:

   (a) l'espressione esplicita della forma quadratica $Q(x, y, z) = X^{\mathrm{T}} S\, X$:

   (b) gli autovalori della matrice S:

   (c) il segno della forma quadratica Q:

   (d) un cambio di variabile $X = NX'$ che consenta di scrivere Q in forma canonica:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**8 febbraio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e sia $A = Y\, W^{\mathrm{T}}$.

1. Si determini l'ordine ed il rango della matrice A.
2. Si verifichi che se $\boldsymbol{u}$ è un vettore ortogonale a W allora risulta $A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.
3. Si dimostri che Y è autovettore di A, determinandone l'autovalore corrispondente.
4. Si determini una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A.