CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**17 gennaio 2013**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ composta dai vettori $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che:

$$L(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Si determini la dimensione di $\ker L$ e $\operatorname{Im} L$ esplicitandone una base:

   (b) Si determini la matrice associata a L rispetto alla base $\mathcal{B}$ in $\mathbb{R}^3$ ed alla base canonica in $\mathbb{R}^2$:

   (c) Si calcolino le coordinate del vettore $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$:

   (d) Si determini $L(\boldsymbol{e}_1)$:

   (e) Si determini la matrice associata a L rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$:

---

2. Si considerino le seguenti matrici dipendenti dal parametro h:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2+h & h-2 & 2 & 2-h \\ -h & 1 & -1 & h-2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ h+2 \\ h-1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3+k & k-1 & 2 & 1-k \\ -k-1 & 1 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k+3 \\ k \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4+k & k & 2 & -k \\ -k-2 & 1 & -1 & k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k+4 \\ k+1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5+k & k+1 & 2 & -1-k \\ -3-k & 1 & -1 & k+1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k+5 \\ k+2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1+k & k-3 & 2 & 3-k \\ 1-k & 1 & -1 & k-3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k+1 \\ k-2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ k & k-4 & 2 & 4-k \\ 2-k & 1 & -1 & k-4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k-3 \end{pmatrix},$$

ed il sistema lineare $AX = B$.

(a) Si determini il rango di A al variare di h:

(b) Si determini per quali valori di h il sistema ammette soluzioni.

(c) Si discuta se per qualche valore lo spazio delle soluzioni ha dimensione maggiore o uguale a 2:

(d) Determinare la soluzione generale del sistema per $h = -1$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 3: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Stabilire quali fra i seguenti vettori sono autovettori di A e calcolare i corrispondenti autovalori:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) Si determini il polinomio caratteristico di A:

(c) Si determinino gli autovalori di A con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche:

(d) Si discuta (motivando la risposta) se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare:

(a) Le direzioni delle rette AB e AC:

(b) Le equazioni cartesiane delle rette AB e AC:

(c) L'equazione cartesiana del piano individuato dai punti A, B e C:

(d) Le equazioni cartesiane dell'altezza del triangolo ABC relativa al vertice A:

---

5. Siano $V = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$ e $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Determinare:

(a) $\dim V =$ $\qquad\qquad$ $\dim V^{\perp} =$

(b) Una base ortogonale di V:

(c) Una rappresentazione cartesiana di $V^{\perp}$:

(d) La proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{u}$ su V:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**17 febbraio 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.