CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 novembre 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$:

   (b) Calcolare: $\dim(\operatorname{Im} L) =$ $\qquad$ $\dim(\operatorname{Ker} L) =$ $\qquad$ $L\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} =$

   (c) Trovare una base per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Stabilire se L è suriettiva, giustificando ogni affermazione.

---

2. Considerare i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 1-k \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Determinare:

   (a) per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ sono linearmente indipendenti:

   (b) per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha $\boldsymbol{v}_3 \in \operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$:

   (c) per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha $\dim \operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = 3$:

   (d) per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ sono generatori di $\mathbb{R}^3$:

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, considerare il piano π di equazione $x - 2y + z = 1$. Sia s la retta intersezione di π con il piano x, y. Determinare:

(a) una rappresentazione parametrica per la retta s:

(b) la direzione della retta s:

(c) le equazioni cartesiane della retta r passante per l'origine parallela a s:

(d) l'equazione cartesiana del piano σ contenente r ed il punto $A = (1, 0, 1)$.

---

4. Si consideri la matrice reale A e i vettori di $\mathbb{R}^4$ seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si indichino fra i vettori assegnati quali sono autovettori, specificando il relativo autovalore.

(b) Si scriva il polinomio caratteristico $P_A(x)$ della matrice A.

(c) Per ciascun autovalore, si determini una base e una rappresentazione cartesiana del corrispondente autospazio.

(d) Discutere la diagonalizzabilità della matrice A.

---

5. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino il sottospazio U ed il vettore $\boldsymbol{v}$:

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare:

(a) $\dim U$ e una base ortonormale per U:

(b) $\dim U^\perp$ e una base per $U^\perp$:

(c) la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{v}$ su $U^\perp$:

(d) i vettori $\boldsymbol{u} \in U$ e $\boldsymbol{w} \in U^\perp$ tali che $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 novembre 2012
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio, fornendo dettagli dei passaggi risolutivi:

Si considerino le seguenti matrici 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare $\det A$ e $\det B$.
2. Calcolare $\det(AB)$, $\det B^3$ e $\det 2B$.
3. Calcolare il polinomio caratteristico di A
4. Stabilire se 1 è autovalore di A.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	23 novembre 2012
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere la matrice A che rappresenta L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

   (b) Calcolare: $\dim(\operatorname{Im} L) =$ $\qquad$ $\dim(\operatorname{Ker} L) =$ $\qquad$ $L\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} =$

   (c) Trovare una base per il sottospazio $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Stabilire se L è suriettiva, giustificando ogni affermazione.

---

2. Considerare i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-h \\ 2-h \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} h-1 \\ h-1 \\ h-1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Determinare:

   (a) per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ sono linearmente indipendenti:

   (b) per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ si ha $\boldsymbol{v}_3 \in \operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$:

   (c) per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ si ha $\dim \operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = 3$:

   (d) per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ i vettori $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ sono generatori di $\mathbb{R}^3$:

---

3. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}, \boldsymbol{k})$, considerare il piano π di equazione $x - 2y + z = 1$. Sia s la retta intersezione di π con il piano y, z. Determinare:

   (a) una rappresentazione parametrica per la retta s:

   (b) la direzione della retta s:

   (c) le equazioni cartesiane della retta r passante per l'origine parallela a s:

   (d) l'equazione cartesiana del piano σ contenente r ed il punto $A = (1, 0, 1)$.

---

4. Si consideri la matrice reale A e i vettori di $\mathbb{R}^4$ seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Si indichino fra i vettori assegnati quali sono autovettori, specificando il relativo autovalore.

   (b) Si scriva il polinomio caratteristico $P_A(x)$ della matrice A.

   (c) Per ciascun autovalore, si determini una base e una rappresentazione cartesiana del corrispondente autospazio.

   (d) Discutere la diagonalizzabilità della matrice A.

---

5. Fissato in $\mathbb{R}^4$ il prodotto scalare standard, si considerino il sottospazio U ed il vettore $\boldsymbol{v}$:

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 - x_3 = x_4 = 0 \}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Determinare:

   (a) $\dim U$ e una base ortonormale per U:

   (b) $\dim U^{\perp}$ e una base per $U^{\perp}$:

   (c) la proiezione ortogonale del vettore $\boldsymbol{v}$ su $U^{\perp}$:

   (d) i vettori $\boldsymbol{u} \in U$ e $\boldsymbol{w} \in U^{\perp}$ tali che $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**23 novembre 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio, fornendo dettagli dei passaggi risolutivi:

Si considerino le seguenti matrici 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare $\det A$ e $\det B$.
2. Calcolare $\det(AB)$, $\det B^3$ e $\det 2B$.
3. Calcolare il polinomio caratteristico di A
4. Stabilire se 1 è autovalore di A.