CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 luglio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (b) Scrivere una base per $\operatorname{Ker} L$ e una per $\operatorname{Im} L$:

   (c) Trovare le equazioni cartesiane per $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

   (d) Stabilire per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L$.

   (e) Trovare una matrice B tale che $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Im} A$ e $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$.

---

2. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro h:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ h^2-2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h-2 \\ h-2 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini, al variare di h, la dimensione di $V = \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$:

   (b) Si discuta per quale/i valori di h il vettore $\boldsymbol{v}_4 \in V$:

   (c) Si determini, al variare di h, la dimensione di $V + \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_4)$:

   (d) Posto $h = 2$, si determinino le coordinate di $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$:

---

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Stabilire quali fra i seguenti vettori sono autovettori di A specificandone l'autovalore corrispondente:
   $$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (b) Determinare tutti gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Stabilire se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A. In caso positivo, determinare tale base.

---

4. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio descritto dalle equazioni $x - y + z = y - z + t = 0$. Si considerino i vettori: $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Trovare una base ortogonale di V.

   (b) Trovare una base ortogonale di $V^\perp$.

   (c) Determinare due vettori $u' \in V$ e $u'' \in V^\perp$ tale che $v = u' + u''$. Tali vettori sono unici?

   (d) Trovare la proiezione ortogonale di w su $V^\perp$.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano $\pi\colon x - 2y + 2z = 0$, la retta $r\colon x + z - 2 = x + 2y - 3 = 0$ ed il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Trovare la proiezione ortogonale di P sul piano π.

   (b) Trovare il piano σ passante per O e per P e perpendicolare a π.

   (c) Trovare una rappresentazione parametrica per la retta $s = \sigma \cap \pi$.

   (d) Determinare la posizione reciproca delle rette r e s.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 luglio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma quadratica e si supponga che $q\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 4$ e $q\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -3$. Rispondere alle seguenti domande motivando in modo esaustivo ciascuna risposta:

1. Qual è il segno di q?
2. Qual è la somma degli autovalori della matrice associata alla forma quadratica ?
3. Con le informazioni date, è possibile determinare la forma quadratica q? In caso affermativo determinare q, in caso negativo determinare due forme quadratiche che soddisfano il dato del problema.
4. Esiste sicuramente un vettore X di $\mathbb{R}^2$ tale che $q(X) = 0$?
5. Supponendo che $q\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2$, si determini quanto vale $q\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 luglio 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (b) Scrivere una base per $\operatorname{Ker} L$ e una per $\operatorname{Im} L$:

   (c) Trovare le equazioni cartesiane per $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

   (d) Stabilire per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L$.

   (e) Trovare una matrice B tale che $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Im} A$ e $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$.

---

2. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro h:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \\ h-2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ h^2-2 \\ h-2 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini, al variare di h, la dimensione di $V = \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$:

   (b) Si discuta per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{v}_4 \in V$:

   (c) Si determini, al variare di h, la dimensione di $V + \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_4)$:

   (d) Posto $h = 2$, si determinino le coordinate di $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$:

---

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Stabilire quali fra i seguenti vettori sono autovettori di A specificandone l'autovalore corrispondente:
   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (b) Determinare tutti gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Stabilire se è possibile trovare una matrice invertibile N tale che $N^{-1}AN$ è una matrice diagonale. In caso positivo, determinare una tale matrice.

---

4. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio descritto dalle equazioni $x + y + t = y + z - t = 0$. Si considerino i vettori: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Trovare una base ortogonale di V.

   (b) Trovare una base ortogonale di $V^\perp$.

   (c) Determinare due vettori $u' \in V$ e $u'' \in V^\perp$ tale che $v = u' + u''$. Tali vettori sono unici?

   (d) Trovare la proiezione ortogonale di w su V.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano $\pi\colon 2x - y + 2z = 0$, la retta $r\colon x - z + 2 = x - 2y + 3 = 0$ ed il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Trovare la proiezione ortogonale di P sul piano π.

   (b) Trovare il piano σ passante per O e per P e perpendicolare a π.

   (c) Trovare una rappresentazione parametrica per la retta $s = \sigma \cap \pi$.

   (d) Determinare la posizione reciproca delle rette r e s.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 luglio 2012
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma quadratica e si supponga che $q\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3$ e $q\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 3$ e $q\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 4$. Rispondere alle seguenti domande motivando in modo esaustivo ciascuna risposta:

1. Con le informazioni date, è possibile determinare la forma quadratica q? In caso affermativo determinare q, in caso negativo determinare due forme quadratiche che soddisfano il dato del problema.
2. Qual è il segno di q?
3. Esiste un vettore X di $\mathbb{R}^2$ tale che $q(X) = 0$?
4. Si determini il minimo valore h tale che la forma quadratica $q(x, y) - h(x^2 + y^2)$ risulti semidefinita negativa.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	10 luglio 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare: $\dim \operatorname{Ker} L =$ $\qquad$ $\dim \operatorname{Im} L =$

   (b) Scrivere una base per $\operatorname{Ker} L$ e una per $\operatorname{Im} L$:

   (c) Trovare le equazioni cartesiane per $\operatorname{Ker} L$ e $\operatorname{Im} L$:

   (d) Stabilire per quali valori di h il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L$.

   (e) Trovare una matrice B tale che $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Im} A$ e $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$.

---

2. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$ dipendenti dal parametro h:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ h^2-5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h-1 \\ h+1 \end{pmatrix}$$

   (a) Si determini, al variare di h, la dimensione di $V = \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$:

   (b) Si discuta per quale/i valori di h il vettore $\boldsymbol{v}_4 \in V$:

   (c) Si determini, al variare di h, la dimensione di $V + \operatorname{Span}(\boldsymbol{v}_4)$:

   (d) Posto $h = 1$, si determinino le coordinate di $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$:

---

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Stabilire quali fra i seguenti vettori sono autovettori di A specificandone l'autovalore corrispondente:

   $$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (b) Determinare tutti gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche.

   (c) Determinare una base di ciascun autospazio di A.

   (d) Stabilire se è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A. In caso positivo, determinare tale base.

---

4. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio descritto dalle equazioni $-x + y + z = y - z + t = 0$.
   Si considerino i vettori: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Trovare una base ortogonale di V.

   (b) Trovare una base ortogonale di $V^\perp$.

   (c) Determinare due vettori $u' \in V$ e $u'' \in V^\perp$ tale che $v = u' + u''$. Tali vettori sono unici?

   (d) Trovare la proiezione ortogonale di w su $V^\perp$.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino il piano $\pi\colon x - 2y + 2z = 0$, la retta $r\colon x - 2 = z - y + 1 = 0$ ed il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Trovare la proiezione ortogonale di P sul piano π.

   (b) Trovare il piano σ passante per O e per P e perpendicolare a π.

   (c) Trovare una rappresentazione parametrica per la retta $s = \sigma \cap \pi$.

   (d) Determinare la posizione reciproca delle rette r e s.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**10 luglio 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Sia $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma quadratica e si supponga che $q\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 4$ e $q\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2$. Rispondere alle seguenti domande motivando in modo esaustivo ciascuna risposta:

1. Calcolare $q\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$.
2. Qual è la somma degli autovalori della matrice associata alla forma quadratica ?
3. Con le informazioni date, è possibile determinare la forma quadratica q? In caso affermativo determinare q, in caso negativo determinare due forme quadratiche che soddisfano il dato del problema.
4. Trovare la condizione affinché q sia definita positiva.
5. Supponendo che $q\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2$, si determini quanto vale $q\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
