CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**20 giugno 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0 \right\}$,

   ed i vettori: $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcolare: $\dim U =$

   (b) Stabilire se $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ appartengono a U, se sono generatori o una base per U:

   (c) Determinare una base $\mathcal{B}$ di U contenente il vettore $\boldsymbol{u}_1$:

   (d) Determinare il vettore $\boldsymbol{w} \in U$ che nella base trovata $\mathcal{B}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

   (e) Scrivere le cooordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base trovata $\mathcal{B}$:

---

2. Si considerino la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ ed il vettore colonna b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -h & h^2 & h-2 \\ 3 & 3 & -3 & h+6 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = b$ ammette soluzioni.

   (c) Determinare per quali valori di h l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2.

   (d) Posto $h = -1$, determinare la soluzione generale del sistema $AX = b$:

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 1-h \end{pmatrix}$$

   (a) Scrivere il polinomio caratteristico di A:

   (b) Determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

   (c) Determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ le molteplicità geometriche degli autovalori:

   (d) Determinare per quali valori di h la matrice A è diagonalizzabile:

   (e) Stabilire se è possibile, per qualche valore di h, trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:

---

4. Si consideri la forma quadratica $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x^2 + 4xy + 6y^2 + 2xz + 4yz + 3z^2.$$

   (a) Scrivere Φ in forma matriciale:

   (b) Scrivere un'equazione canonica per Φ:

   (c) Stabilire se esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\Phi(\boldsymbol{v}) = -1$.

   (d) Stabilire se esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\Phi(\boldsymbol{v}) = 3$. In caso affermativo, si chiede se tale vettore è unico.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino la retta $r\colon x-y = x+z-1 = 0$ ed il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) Le equazioni della retta s passante per P e parallela a r:

   (b) L'equazione del piano π contenente la retta r ed il punto P:

   (c) L'equazione del piano α passsante per P e perpendicolare a r:

   (d) La distanza di P da r:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	20 giugno 2012
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Fissata la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ in $\mathbb{R}^3$, sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore lineare che soddisfa le condizioni seguenti:

$$\operatorname{Ker} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + z = 0 \right\} \qquad L(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3.$$

1. Determinare $\dim \operatorname{Ker} L$ e $\dim \operatorname{Im} L$.
2. Stabilire se L è iniettiva, motivando ogni affermazione.
3. Determinare una base per lo spazio $\operatorname{Im} L$.
4. Calcolare i vettori $L(\boldsymbol{e}_2)$ e $L(\boldsymbol{e}_1)$.
5. Trovare la matrice associata ad L nella base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	20 giugno 2012
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si considerino il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0 \right\}$,

   ed i vettori: $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcolare: $\dim U =$

   (b) Stabilire se $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ appartengono ad U, se sono generatori o una base per U:

   (c) Determinare una base $\mathcal{B}$ di U contenente il vettore $\boldsymbol{u}_1$:

   (d) Determinare il vettore $\boldsymbol{w} \in U$ che nella base trovata $\mathcal{B}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

   (e) Scrivere le cooordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base trovata $\mathcal{B}$:

---

2. Si considerino la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ ed il vettore colonna b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -h & -h^2 & h+1 \\ 3 & -3 & 3 & \dfrac{h}{2} - 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = b$ ammette soluzioni.

   (c) Determinare per quali valori di h l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2.

   (d) Posto $h = 1$, determinare la soluzione generale del sistema $AX = b$:

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4+h \end{pmatrix}$$

   (a) Scrivere il polinomio caratteristico di A:

   (b) Determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

   (c) Determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ le molteplicità geometriche degli autovalori:

   (d) Determinare per quali valori di h la matrice A è diagonalizzabile:

   (e) Stabilire se è possibile, per qualche valore di h, trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:

---

4. Si consideri la forma quadratica $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2xz + 4yz + 2z^2.$$

   (a) Scrivere Φ in forma matriciale:

   (b) Scrivere un'equazione canonica per Φ:

   (c) Stabilire se esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\Phi(\boldsymbol{v}) = 0$.

   (d) Stabilire se esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\Phi(\boldsymbol{v}) = 5$. In caso affermativo, si chiede se tale vettore è unico.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino la retta $r\colon x - z = x + y - 1 = 0$ ed il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Determinare:

   (a) Le equazioni della retta s passante per P e parallela a r:

   (b) L'equazione del piano π contenente la retta r ed il punto P:

   (c) L'equazione del piano α passsante per P e perpendicolare a r:

   (d) La distanza di P da r:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	20 giugno 2012
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Fissata la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ in $\mathbb{R}^3$, sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore lineare che soddisfa le condizioni seguenti:

$$\operatorname{Ker} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y = x - z = 0 \right\}, \qquad L(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare $\dim \operatorname{Ker} L$ e $\dim \operatorname{Im} L$.
2. Stabilire se L è suriettiva, motivando ogni affermazione.
3. Determinare una base per lo spazio $\operatorname{Im} L$.
4. Calcolare il vettore $L(\boldsymbol{e}_3)$.
5. Trovare la matrice associata ad L nella base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**20 giugno 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si considerino il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0 \right\}$,

   ed i vettori: $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcolare: $\dim U =$

   (b) Stabilire se $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ appartengono ad U, se sono generatori o una base per U:

   (c) Determinare una base $\mathcal{B}$ di U contenente il vettore $\boldsymbol{u}_1$:

   (d) Determinare il vettore $\boldsymbol{w} \in U$ che nella base trovata $\mathcal{B}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

   (e) Scrivere le cooordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base trovata $\mathcal{B}$:

---

2. Si considerino la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$ ed il vettore colonna b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -\dfrac{h^2}{4} & h & h \\ 2 & 2 & 4 & 2+h \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$ il rango di A:

   (b) Determinare per quali valori di h il sistema $AX = b$ ammette soluzioni.

   (c) Determinare per quali valori di h l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = \mathbf{0}$ ha dimensione 2.

   (d) Posto $h = 1$, determinare la soluzione generale del sistema $AX = b$:

---

3. Si consideri la seguente matrice quadrata dipendente dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2+h \end{pmatrix}$$

   (a) Scrivere il polinomio caratteristico di A:

   (b) Determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

   (c) Determinare al variare di $h \in \mathbb{R}$ le molteplicità geometriche degli autovalori:

   (d) Determinare per quali valori di h la matrice A è diagonalizzabile:

   (e) Stabilire se è possibile, per qualche valore di h, trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A:

---

4. Si consideri la forma quadratica $\Phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -5x^2 + 4xy - 2y^2 + 2xz + 4yz - 5z^2.$$

   (a) Scrivere Φ in forma matriciale:

   (b) Scrivere un'equazione canonica per Φ:

   (c) Stabilire se esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\Phi(\boldsymbol{v}) = 1$.

   (d) Stabilire se esiste un vettore $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\Phi(\boldsymbol{v}) = -2$. In caso affermativo, si chiede se tale vettore è unico.

---

5. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino la retta $r \colon x-y = y+z-1 = 0$ ed il punto $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare:

   (a) Le equazioni della retta s passante per P e parallela a r:

   (b) L'equazione del piano π contenente la retta r ed il punto P:

   (c) L'equazione del piano α passsante per P e perpendicolare a r:

   (d) La distanza di P da r:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**20 giugno 2012**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio.

Fissata la base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ in $\mathbb{R}^3$, sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore lineare che soddisfa le condizioni seguenti:

$$\operatorname{Ker} L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y - z = 0 \right\} \qquad L(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2.$$

1. Determinare $\dim \operatorname{Ker} L$ e $\dim \operatorname{Im} L$.
2. Stabilire se L è biiettiva, motivando ogni affermazione.
3. Determinare una base per lo spazio $\operatorname{Ker} L$.
4. Calcolare i vettori $L(\boldsymbol{e}_1)$ e $L(\boldsymbol{e}_3)$.
5. Trovare la matrice associata ad L nella base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.