CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	14 settembre 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

1. Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ così definita

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky + z \\ x + y + kz \end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere la matrice associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$:

   (b) Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $\dim(\operatorname{Im} L)$:

   (c) Posto $k = 1$, determinare una rappresentazione cartesiana ed una base per lo spazio $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L$:

---

2. Si considerino la matrice A dipendente dal parametro k e il vettore $B \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} (k-1) & (k+1) & (2k+1) & (1+2k) \\ -(k+1) & (k+1) & (k+1) & 1 \\ (1-k) & -(1+k) & -(2k+1) & -(1+k) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Determinare:

   (a) $\operatorname{rg}(A)$ e $\dim \operatorname{Ker} A$ al variare del parametro k:

   (b) Per quali valori di k il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

   (c) La soluzione generale del sistema $AX = B$ per $k = 1$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere il polinomio caratteristico di A:

   (b) Determinare gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

   (c) Scrivere le equazioni degli autospazi di A e la loro dimensione:

   (d) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando ogni affermazione:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i vettori $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$ ed $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e le rette $r = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v})$ ed $s = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$. Determinare:

   (a) L'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r e s:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta n perpendicolare al piano π e passante per $P = (1, 1, 1)$:

   (c) Le coordinate del punto P' proiezione ortogonale di P sul piano π:

   (d) Una scrittura del vettore $\overrightarrow{OP'}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$:

---

5. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio da essi generato. Determinare:

   (a) $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim U^\perp =$

   (b) Una base ortogonale $\mathcal{B}$ di U:

   (c) Le equazioni cartesiane di $U^\perp$:

   (d) Una base *ortogonale* di $\mathbb{R}^4$ ottenuta completando la base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	14 settembre 2011
Cognome e Nome:	Matricola:
Corso di Laurea:	Anno di corso:

Svolgere in modo completo il seguente esercizio

Sia Q la seguente matrice quadrata reale simmetrica di ordine 4:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire quali fra i seguenti numeri reali sono autovalori della matrice Q:

$$l_1 = 0; \qquad l_2 = 1; \qquad l_3 = -1; \qquad l_4 = 4; \qquad l_5 = 3.$$

2. Determinare tutti gli autovalori di Q con le relative molteplicità algebriche.

   Si consideri la forma quadratica in 4 variabili $q(X) = X^T Q X$ dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

   Determinare:

3. L'espressione polinomiale di $q(x, y, z, t) =$

4. Una forma canonica $q(x', y', z', t') =$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	14 settembre 2011
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ così definita

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ x-ky \\ kx-y \end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere la matrice associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:

   (b) Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $\dim(\operatorname{Im} L)$:

   (c) Posto $k=-1$, determinare una rappresentazione cartesiana ed una base per lo spazio $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L$:

---

2. Si considerino la matrice A dipendente dal parametro h e il vettore $B \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} (h-2) & h & (2h-1) & (2h-1) \\ -h & h & h & 1 \\ (2-h) & -h & (1-2h) & -h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Determinare:

   (a) $\operatorname{rg}(A)$ e $\dim \operatorname{Ker} A$ al variare del parametro h:

   (b) Per quali valori di h il sistema $AX=B$ ammette soluzioni:

   (c) La soluzione generale del sistema $AX=B$ per $h=2$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Scrivere il polinomio caratteristico di A:

(b) Determinare gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

(c) Scrivere le equazioni degli autospazi di A e la loro dimensione:

(d) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando ogni affermazione:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i vettori $\boldsymbol{v} = -\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$ ed $\boldsymbol{u} = -2\hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e le rette $r = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v})$ ed $s = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$. Determinare:

(a) L'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r e s:

(b) Le equazioni cartesiane della retta n perpendicolare al piano π e passante per $P = (1, 1, 1)$:

(c) Le coordinate del punto P' proiezione ortogonale di P sul piano π:

(d) Una scrittura del vettore $\overrightarrow{OP'}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$:

---

5. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio da essi generato. Determinare:

(a) $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim U^{\perp} =$

(b) Una base ortogonale $\mathcal{B}$ di U:

(c) Le equazioni cartesiane di $U^{\perp}$:

(d) Una base *ortogonale* di $\mathbb{R}^4$ ottenuta completando la base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**14 settembre 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio

Sia Q la seguente matrice quadrata reale simmetrica di ordine 4:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire quali fra i seguenti numeri reali sono autovalori della matrice Q:

$$l_1 = 0; \qquad l_2 = 1; \qquad l_3 = -1; \qquad l_4 = 4; \qquad l_5 = 3.$$

2. Determinare tutti gli autovalori di Q con le relative molteplicità algebriche.

   Si consideri la forma quadratica in 4 variabili $q(X) = X^T Q X$ dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

   Determinare:

3. L'espressione polinomiale di $q(x, y, z, t) =$

4. Una forma canonica $q(x', y', z', t') =$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**14 settembre 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri l'applicazione lineare $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ così definita

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + ky + 2z \\ 2x + 2y + kz \end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere la matrice associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$:

   (b) Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $\dim(\operatorname{Im} L)$:

   (c) Posto $k = 2$, determinare una rappresentazione cartesiana ed una base per lo spazio $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} L$:

---

2. Si considerino la matrice A dipendente dal parametro k e il vettore $B \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} (k-1) & (k+1) & (2k+1) & (1+2k) \\ -(k+1) & (k+1) & (k+1) & 1 \\ (1-k) & -(1+k) & -(2k+1) & -(1+k) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Determinare:

   (a) $\operatorname{rg}(A)$ e $\dim \operatorname{Ker} A$ al variare del parametro k:

   (b) Per quali valori di k il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

   (c) La soluzione generale del sistema $AX = B$ per $k = 1$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere il polinomio caratteristico di A:

   (b) Determinare gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

   (c) Scrivere le equazioni degli autospazi di A e la loro dimensione:

   (d) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando ogni affermazione:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i vettori $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$ ed $\boldsymbol{u} = -2\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \hat{\boldsymbol{k}}$ e le rette $r = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v})$ ed $s = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$. Determinare:

   (a) L'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r e s:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta n perpendicolare al piano π e passante per $P = (1, 1, 1)$:

   (c) Le coordinate del punto P' proiezione ortogonale di P sul piano π:

   (d) Una scrittura del vettore $\overrightarrow{OP'}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$:

---

5. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio da essi generato. Determinare:

   (a) $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim U^{\perp} =$

   (b) Una base ortogonale $\mathcal{B}$ di U:

   (c) Le equazioni cartesiane di $U^{\perp}$:

   (d) Una base *ortogonale* di $\mathbb{R}^4$ ottenuta completando la base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**14 settembre 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio

Sia Q la seguente matrice quadrata simmetrics di ordine 4:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire quali fra i seguenti numeri reali sono autovalori della matrice Q:

$$l_1 = 0; \qquad l_2 = 1; \qquad l_3 = -1; \qquad l_4 = 2; \qquad l_5 = -2.$$

2. Determinare tutti gli autovalori di Q con le relative molteplicità algebriche.

   Si consideri la forma quadratica in 4 variabili $q(X) = X^T Q X$ dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

   Determinare:

3. L'espressione polinomiale di $q(x, y, z, t) =$
4. Una forma canonica $q(x', y', z', t') =$

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	14 settembre 2011
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

1. Si consideri l'applicazione lineare $L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ così definita

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + ky \\ kx + 2y \end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere la matrice associata a L nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:

   (b) Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, $\dim(\operatorname{Im} L)$:

   (c) Posto $k = -2$, determinare una rappresentazione cartesiana ed una base per lo spazio $\operatorname{Ker} L$:

   (d) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il vettore $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L$:

---

2. Si considerino la matrice A dipendente dal parametro h e il vettore $B \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} (h-2) & h & (2h-1) & (2h-1) \\ -h & h & h & 1 \\ (2-h) & -h & (1-2h) & -h \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Determinare:

   (a) $\operatorname{rg}(A)$ e $\dim \operatorname{Ker} A$ al variare del parametro h:

   (b) Per quali valori di h il sistema $AX = B$ ammette soluzioni:

   (c) La soluzione generale del sistema $AX = B$ per $h = 2$:

---

3. Si consideri la seguente matrice reale quadrata di ordine 4:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Scrivere il polinomio caratteristico di A:

   (b) Determinare gli autovalori della matrice A, con le corrispondenti molteplicità algebriche:

   (c) Scrivere le equazioni degli autospazi di A e la loro dimensione:

   (d) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando ogni affermazione:

---

4. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}})$, si considerino i vettori $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{\imath}} + \hat{\boldsymbol{\jmath}} - \hat{\boldsymbol{k}}$ ed $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{\imath}} - 2\hat{\boldsymbol{k}}$ e le rette $r = \mathrm{Span}(\boldsymbol{v})$ ed $s = \mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$. Determinare:

   (a) L'equazione cartesiana del piano π contenente le rette r e s:

   (b) Le equazioni cartesiane della retta n perpendicolare al piano π e passante per $P = (1, 1, 1)$:

   (c) Le coordinate del punto P' proiezione ortogonale di P sul piano π:

   (d) Una scrittura del vettore $\overrightarrow{OP'}$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$:

---

5. Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^4$: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio da essi generato. Determinare:

   (a) $\dim U =$ $\qquad\qquad$ $\dim U^{\perp} =$
   (b) Una base ortogonale $\mathcal{B}$ di U:
   (c) Le equazioni cartesiane di $U^{\perp}$ =:
   (d) Una base *ortogonale* di $\mathbb{R}^4$ ottenuta completando la base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente:

CORSO DI GEOMETRIA E ALGEBRA	**14 settembre 2011**
Cognome e Nome:	**Matricola:**
Corso di Laurea:	**Anno di corso:**

Svolgere in modo completo il seguente esercizio

Sia Q la seguente matrice quadrata reale simmetrica di ordine 4:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire quali fra i seguenti numeri reali sono autovalori della matrice Q:

$$l_1 = 0; \qquad l_2 = 4; \qquad l_3 = -1; \qquad l_4 = 2; \qquad l_5 = -2.$$

2. Determinare tutti gli autovalori di Q con le relative molteplicità algebriche.

   Si consideri la forma quadratica in 4 variabili $q(X) = X^T Q X$ dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

   Determinare:

3. L'espressione polinomiale di $q(x, y, z, t) =$

4. Una forma canonica $q(x', y', z', t') =$