1 VARIABILI ALEATORIE SU SPAZI DI PROBABILITÀ FINITI

Esempio 1 *Possiedo 100 euro e decido di giocarli alla roulette puntandoli sul numero 7. Quale è il valore del mio capitale dopo questa operazione?*

Naturalmente il valore del capitale non è noto a priori, ma dipende dal numero uscito alla roulette. Possiamo descrivere questa situazione con l'insieme Ω delle possibili uscite nel gioco della roulette, che sono i numeri tra 0 e 36:

$$\Omega = \{0, 1, 2, ..., 36\}$$

In caso di vittoria, e qundi se esce 7, il capitale sarà $100 \cdot 36 = 3600$. In caso di sconfitta, cioè se esce uno qualunque degli altri numeri, il capitale sarà 0. Il valore del capitale è quindi una funzione definita su Ω a valori reali che ad ogni numero diverso da 7 associa 0 e a 7 associa 3600.
Indicando tale funzione con X si ha:

$$X : \Omega \to \mathbf{R}$$

con $X(i) = \begin{cases} 0 \quad se \quad x \neq 7 \\ 3600 \quad se \quad x = 7 \end{cases}$.

Esempio 2 *Due giocatori giocano a testa o croce con una moneta equilibrata. Vince chi per primo totalizza due vincite. Quanto dura la partita?*

Un insieme Ω adatto a modellizzare questa situazione è l'insieme dei possibili risultati delle prime 3 partite (osserviamo che dopo 3 partite il gioco è comunque finito). Un possibile spazio Ω degli eventi è dunque:

$$\Omega = \{TTT,\ TCT,\ TCC,\ TTC,\ CTT,\ CCT,\ CTC,\ CCC\}$$

con la misura di probabilità che, per ragioni di simmetria, vale $\frac{1}{8}$ su ogni evento elementare. La durata del gioco è una funzione definita su Ω che vale 2 nel caso TTC,TTC,CCT,CCC e 3 nei casi rimanenti.

$$Y : \Omega \to \mathbf{R}$$

con $Y(TTC) = 2$, $Y(TCT) = 3$,....

Definizione 1 *Dato uno spazio di probabilità* $(\Omega, P(\Omega), p)$ *con* Ω *finito, si dice variabile aleatoria (brevemente v.a.) una funzione definita su* Ω*, cioè una funzione che dipende dal caso. D'ora in poi, faremo riferimento a v.a. a valori reali.*

Nel primo esempio la variabile aleatoria è il valore del capitale, nel secondo è la durata della partita.
Una variabile aleatoria si indica usualmente con una lettera maiuscola, per esempio X, e i suoi possibili valori (ricordiamo che abbiamo fatto l'ipotesi che Ω sia finito) con $x_1, x_2, ...x_n$.

Se x è un numero reale, si indica con :
$(X = x) = \{\omega \in \Omega$ tali che $X(\omega) = x\}$.
$(X \leq x) = \{\omega \in \Omega$ tali che $X(\omega) \leq x\}$.
Naturalmente :
$A_1 = (X = x_1), A_2 = (X = x_2), ..., A_n = (X = x_n)\}$
sono eventi .

Indichiamo con $p_1, p_2, ..., p_n$ le rispettive probabilità. Naturalmente $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$, infatti $p_1 + p_2 + ... + p_n$ è la probabilità che X assuma uno dei suoi possibili valori, cioè la probabilità dell'evento certo.

Definizione 2 La legge o distribuzione di una variabile aleatoria è l'insieme formato dai suoi valori $x_1,\ x_2, ...\ x_n$ **e le corrispondenti probabilità** $p_1, p_2, ...p_n$.

Osservazione 1 *Rappresentiamo nel modo seguente le leggi delle variabili aleatorie dei due esempi:*

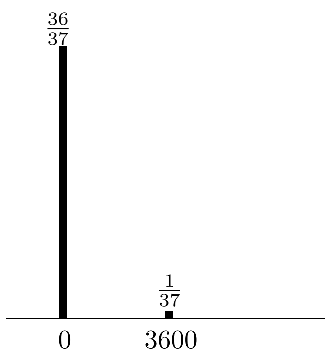

Figura 1: legge di X

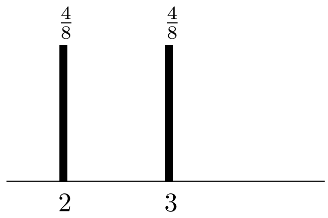

Figura 2: legge di Y

Osservazione 2 *La legge di una variabile aleatoria di fatto induce una misura di probabilità su*

$$(\{x_1, x_2, ...x_n\}, P(\{x_1, x_2, ...x_n\})$$

definita come $p_X(E) = p\{\omega \in \Omega \;\; t.c. \;\; X(\omega) \in E\}$.

In sostanza quindi una v.a. "trasporta" la struttura di spazio di probabilità da Ω a $\mathbf{R}$

Definizione 3 *Due variabili aleatorie che hanno la stessa legge si dicono* **equidistribuite.**

Definizione 4 Si dice speranza matematica o media o valore atteso *della variabile aleatoria X il numero*

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ...x_n \cdot p_n.$$

Ovviamente variabili aleatorie equidistribuite hanno la stessa media.

Osservazione 3 *La media di una v.a. non è altro che una "media pesata" dei valori che essa assume, dove i pesi sono le probabilità con cui un valore viene assunto.*

Esercizio 1 *Dimostrare che se a è un numero reale*

$$E(a \cdot X) = a \cdot E(x)$$

Infatti se X assume i valori $x_1, x_2, ..., x_n$ con probabilità rispettivamente $p_1, p_2, ..., p_n$, aX assume i valori $ax_1, ax_2, ..., ax_n$ con le stesse probabilità e dunque:

$$E(aX) = p_1 a x_1 + p_2 a x_2 + ... + p_n a x_n = a(p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n) = aE(X)$$

Esercizio 2 *Analogamente si potrebbe dimostrare che se X e Y sono due variabili aleatorie*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Esercizio 3 *Calcoliamo la media della variabile aleatoria del primo esempio. Si ha:*

$$E(X) = 0 \cdot 36/37 + 3600 \cdot 1/37 = 3600/37$$

Esercizio 4 *Calcoliamo ora la media della variabile aleatoria del secondo esempio:*

$$E(Y) = 2 \cdot 4/8 + 3 \cdot 4/8 = 5/2.$$

Osservazione 4 *Osserviamo che in generale la media di una variabile aleatoria non coincide con alcuno dei valori che la variabile aleatoria assume, come accade in entrambi gli esempi che abbiamo studiato.*

Definizione 5 **Si dice varianza della variabile aleatoria X il numero**

$$V(X) = E((X - E(X)^2)$$

Si può calcolare la varianza con la formula seguente:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

La varianza misura quanto una variabile aleatoria è dispersa intorno alla sua media.

Esempio 3 *Se una variabile aleatoria è costante, la sua media è uguale al valore costante assunto dalla variabile aleatoria e la sua varianza è uguale a 0.*

Infatti se X è costante, assume solo un valore x_1 con probabilità 1 e dunque $E(X) = x_1$, X^2 assume solo il valore x_1^2 con probabilità 1 e dunque $V(X) = E((X - E(X)^2) = x_1^2 - x_1^2$.

Esempio 4 *Calcoliamo la varianza delle variabili aleatorie dei due esempi.*

$V(X) = \frac{(3600)^2}{37} - (\frac{3600}{37})^2$
$V(Y) = 0$

Definizione 6 *Sia X una variabile aleatoria.*
Si dice **Funzione di ripartizione di** X *la funzione reale di variabile reale:*

$$F_X : R \longrightarrow R$$

così definita:

$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

$F_X(x)$ *è la probabilità che X sia minore o uguale di x.*

Disegnamo le funzioni di ripartizione delle v.a. dei due esempi:

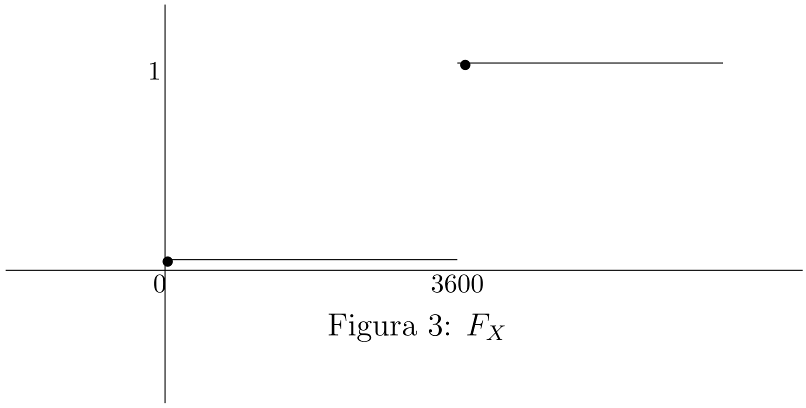

Figura 3: F_X

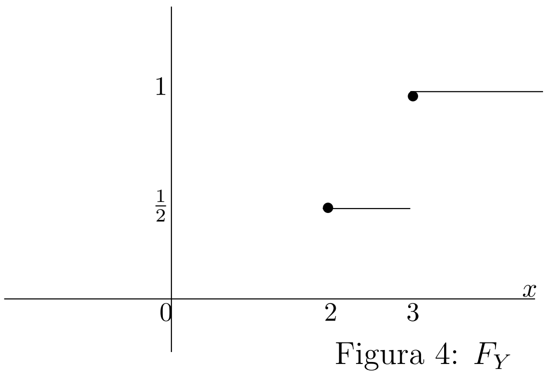

Figura 4: F_Y

Esempio 5 *Lancio una moneta non necessariamente equilibrata, in cui cioè p(T)=p e p(C)=q=1-p e considero la variabile aleatoria* X *definita su* $\Omega = \{T, C\}$ *con* $X(T) = 1$ *e* $X(C) = 0$. *In questo caso*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ q & se \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

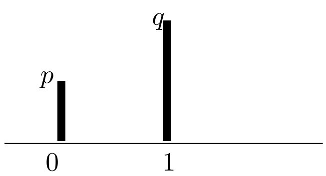

Figura 5: legge di X

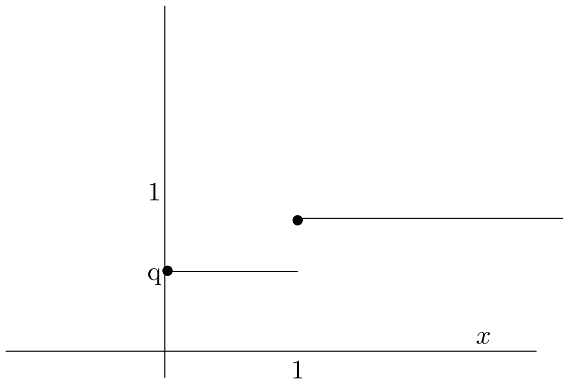

Figura 6: F_X

Esempio 6 *Lancio un dado e considero la v.a. definita su* $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$ *con* $X(i) = i$, *cioè* X *è semplicemente l'uscita del dado. Si ha*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \frac{1}{6} & se \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{6} & se \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{6} & se \quad 2 \leq x < 3 \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \\ 1 & se \quad x \geq 1 \end{cases}$$

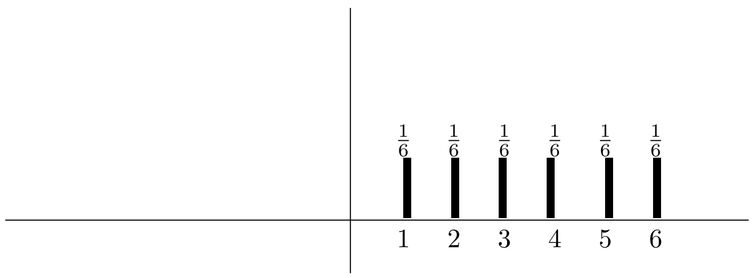

Figura 7: legge di X

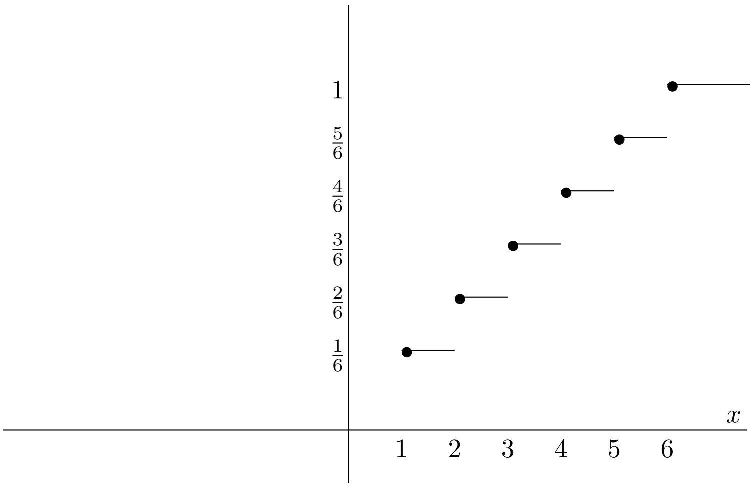

Figura 8: F_X

Le due situazioni di simmetria descritte nei due esempi precedenti danno luogo a variabili aleatorie che si dicono avere una:

Distribuzione di probabilità uniforme.

In tale situazione la funzione di ripartizione è una funzione a scala in cui l'altezza degli scalini è sempre uguale ed è uguale alla probabilità che X sia uguale all'ascissa dello scalino.
La distribuzione F_X di una variabile aleatoria X possiede le seguenti proprietà:

a) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

b) se $x_1 \leq x_2 \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ (è monotona debolmente crescente)

c) $F_X(x) = \lim_{t\to x+} F_X(t)$ (è continua a destra)

1.1 Distribuzioni di v.a. su spazi finiti

L'esempio più semplice di distribuzione di una v.a. è la cosidetta distribuzione di Bernoulli. Abbiamo già visto questa distribuzione studiando il lancio di una moneta non necessariamente equilibriata e la variabile aleatoria X definita su $\Omega = \{T, C\}$ come $X(T) = 1$ e $X(C) = 0$, in cui X rappresenta il numero delle teste osservate dopo il lancio. Una variabile aleatoria X che assume solo i valori 0 e 1 con $p(X = 1) = p$ si dice che ha una

Distribuzione di Bernoulli di parametro p

e si indica con $B(p)$.
Siamo interessati a calcolare la media e la varianza di una variabile aleatoria con distribuzione $B(p)$. Si ha:

$E(X) = p\ ,\ V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$

Siamo ora interessati a studiare altre distribuzioni di probabilità su spazi finiti

Esempio 7 *Lancio una moneta non necessariamente equilibrata, in cui cioè p(T)=p e p(C)=q=1-p n volte e considero come spazio degli eventi l'insieme di tutte le possibili n-ple di uscite, per esempio nel caso di un lancio avremo:*

$$\Omega = \{T, C\}$$

nel caso di due lanci

$$\Omega = \{TT, TC, CT, CC\}$$

nel caso di tre lanci

$$\Omega = \{TTT, TCT, CTT, CCT, TTC, TCC, CTC, CCC\}$$

e così via per il caso di più lanci. Osserviamo che nel caso di n lanci lo spazio Ω contiene esattamente 2^n elementi.

Questa è la classica situazione di indipendenza di eventi nel senso che l'evento "esce testa al k-esimo lancio" e "esce testa all' h-esimo lancio" se $h \neq k$ sono eventi indipendenti. (Osserviamo che l'evento "esce testa al k-esimo lancio" è rappresentato dal sottoinsieme di Ω formato da tutte le sequennze che hanno testa al k-esimo posto.) L'indipendenza ci permette di calcolare la probabilità dell'intersezione degli eventi come il prodotto delle probabilità dei singoli eventi. Per esempio nel caso dei 3 eventi la probabilità che esca la sequenza TCT è uguale al prodotto della probabilità che esca la prima volta testa per la probabilità che esca la seconda volta croce per la probabilità che esca la terza volta testa cioè $p \cdot q \cdot p = p^2 \cdot q$.
Siamo ora interessati a sapere quanto vale la probabilità che esca due volte testa e una volta croce in un ordine qualsiasi, cioè alla probabilità dell'evento:

$$\{TCT, CTT, TTC\}.$$

Per simmetria e per l'additività della misura di probabilità abbiamo:

$$p(\{TCT, CTT, TTC\}) = 3p^2 \cdot q.$$

Vogliamo ora generalizzare questo risultato, cioè stabilire in n lanci consecutivi di una moneta:

1) qual'è la probabilità che esca una ben determinata sequenza

2) qual'è la probabilità che esca esattamente k volte testa e quindi $n-k$ volte croce, in un ordine qualsiasi.

Il primo problema si risolve osservando che gli eventi corrispondenti agli n lanci sono tra loro indipendenti e quindi la probabilità dell'intersezione è uguale al prodotto delle probabilità: quindi se nella sequenza ci sono k teste e $n-k$ croci la probabilità dell'evento è $p^k \cdot q^{n-k}$

Per il secondo è necessario contare quante sono le sequenze distinte che contengono k teste e $n-k$ croci. Questo è un risultato di calcolo combinatorio:

Teorema 1 *Il numero delle sequenze di k teste e n-k croci è esattamente* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ *dove:*

$$k! = \begin{cases} 1 & se \quad k = 0 \\ k\cdot(k-1)\cdot ... \cdot 2\cdot 1 & se \quad k \neq 0 \end{cases}$$

In definitiva la probabilità che escano esattamente k teste e $n-k$ croci risulta essere:

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

Definizione 7 La variabile aleatoria X definita sullo spazio delle sequenze di n lanci di una moneta che associa a ogni lancio il numero delle teste uscite in quel lancio con

$$p(X=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

si dice distribuzione binomiale di parametro p e si indica con $B(n,p)$.

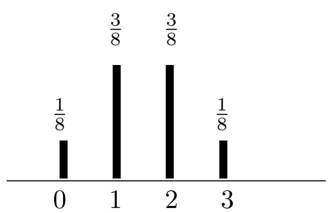

Figura 9: legge $B(3, \frac{1}{2})$

La distribuzione di probabilità binomiale si adatta a descrivere tutte quelle situazioni in cui un esperimento viene ripetuto n volte "indipendentemente l'una dall'altra". Facciamo alcuni esempi:

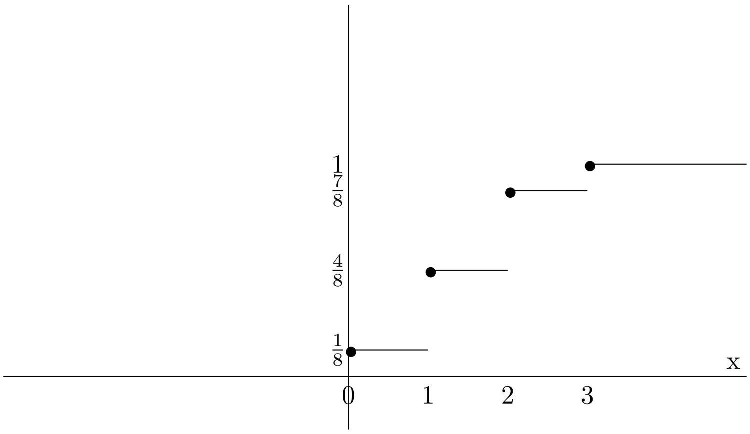

Figura 10: Funzione di ripartizione di$B(3, \frac{1}{2})$

Esempio 8 *Supponiamo di avere un'urna contenente n palline di cui r bianche e n-r nere. Estraiamo una pallina e registriamo se è bianca o nera, la reimbussoliamo e procediamo a una nuova estrazione. Registriamo se la nuova estrazione ha dato una pallina bianca o nera e procediamo sempre in questo modo sino ad aver effettuato n estrazioni. La distribuzione di probabilità relativa al numero di palline bianche estratte è una binomiale con* $p = \frac{r}{n}$ *e* $q = \frac{n-r}{n}$

Esempio 9 *La situazione analoga a quella dell'esempio precedente in cui la pallina non viene di volta in volta reimbussolata non dà luogo a una distribuzione binomiale, in quanto gli eventi corrispondenti alle successive estrazioni non sono più indipendenti.*

Calcoliamo ora la media di una variabile aleatoria $X = B(n, p)$. Basta osservare che X è la somma di n variabili aleatorie bernoulliane di parametro p indipendenti, ciascuna delle quali ha media p. Poiché la media di una somma è la somma delle medie, si ha $E(X) = np$.