COGNOME E NOME

Prova in itinere di Matematica ed Elementi di Statistica (31-10-2003)

Problema 1 (6 punti, 3 punti ciascuno) Un test diagnostico con specificità e sensibilità del 90% viene applicato come screening di massa. Sapendo che la prevalenza della malattia all'interno del gruppo in esame è dell' 1%, calcolare:

a) La probabilità di non avere la malattia se il test ha dato risultato negativo.

b) la probabilità di avere la malattia se il test ha dato risultato positivo.

Ricordo le definizioni:

Specificità= probabilità che il test dia esito negativo in un soggetto sano; Sensibilità= probabilità che il test dia esito positivo in un soggetto malato; Prevalenza= percentuale di soggetti malati nell'intera popolazione

- Risposta a)$\frac{90 \cdot 99}{90 \cdot 99 + 10 \cdot 1} = 0,98$
- Risposta b)$\frac{90 \cdot 1}{90 \cdot 1 + 10 \cdot 99} = 0,08$

Problema 2 (4 punti)

Una variabile statistica X è normale di media -3 e deviazione standard 2.5. Calcolare le seguenti frequenze:

- a) $f\{t \text{ t.c. } -1 < X(t) < 1\}$ =$0,1571$
- b) $f\{t \text{ t.c. } -3 < X(t) < 3\}$ =$0,4918$
- c) $f\{t \text{ t.c. } X(t) > -4\}$ =$0,6554$
- d) $f\{t \text{ t.c. } X(t) = -3\}$ =0

Problema 3 (4 punti: 2 punti ciascuno) Definiamo **concentrazione di una soluzione il rapporto tra il peso del soluto e il peso della soluzione**.

1) Sono dati 8 kg. di soluzione. Sapendo che aggiungendo 80 grammi di soluto si ottiene una soluzione concentrata al 3%, calcolare la concentrazione iniziale (in percentuale, con una cifra decimale per difetto).

2)Date due soluzioni dello stesso soluto e dello stesso solvente di cui la prima al 12%, mescolandole un peso della prima doppio di quello della seconda si ottiene una soluzione al 10%. Calcolare la concentrazione della seconda (in percentuale, con una cifra decimale per difetto).

- Risposta 1)Concentrazione iniziale=2.0%
- Risposta 2)Concentrazione della seconda soluzione =6%

Problema 4 (8 punti:1 ciascuno a 2 e 3 e 1.5 agli altri) Siano X ed Y due variabili statistiche; X assume i valori $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ed $x_3 = 3$, Y assume i valori $y_1 = -1$, $y_2 = 2$ ed $y_3 = -3$. Supponiamo che le frequenze relative congiunte di X ed Y siano

$$p_{XY}(x_1, y_1) = \frac{1}{12} \quad p_{XY}(x_1, y_2) = \frac{2}{12} \quad p_{XY}(x_1, y_3) = \frac{2}{12}$$

$$p_{XY}(x_2, y_1) = \frac{3}{12} \quad p_{XY}(x_2, y_2) = \frac{1}{12} \quad p_{XY}(x_2, y_3) = \frac{1}{12}$$

$$p_{XY}(x_3, y_1) = 0 \quad p_{XY}(x_3, y_2) = 0 \quad p_{XY}(x_3, y_3) = \frac{2}{12}.$$

1. Dire, giustificando la risposta, se X ed Y sono indipendenti.
2. Calcolare le frequenze marginali $p_Y(y_1)$, $p_Y(y_2)$ e $p_Y(y_3)$.
3. Calcolare le frequenze marginali $p_X(x_1)$, $p_X(x_2)$ e $p_X(x_3)$.
4. Calcolare la speranza di X.
5. Calcolare la speranza di $X + Y$.
6. Scrivere la tabella delle frequenze relative congiunte di due variabili statistiche X^* ed Y^* indipendenti, con le stesse frequenze marginali di X ed Y.

- Risposta 1.NO perche per esempio $p_{XY}(x_1, y_1) = \frac{1}{12} \neq \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12}$
- Risposta 2.$p_Y(y_1) = \frac{4}{12}$, $p_Y(y_2) = \frac{3}{12}$ e $p_Y(y_3) = \frac{5}{12}$.
- Risposta 3.$p_X(x_1) = \frac{5}{12}$ $p_X(x_2) = \frac{5}{12}$ e $p_X(x_3) = \frac{2}{12}$.
- Risposta 4.$E(X) = \frac{5}{12} \cdot 1 + \frac{5}{12} \cdot 2 + \frac{2}{12} \cdot 3 = \frac{21}{12}$
- Risposta 5.$E(Y) = \frac{4}{12} \cdot (-1) + \frac{3}{12} \cdot 2 + \frac{5}{12} \cdot (-3) = -\frac{13}{12}$ quindi $E(X+Y) = \frac{21}{12} \cdot -\frac{13}{12} = \frac{8}{12}$
- Risposta 6.

$$p_{X^*Y^*}(x_1, y_1) = \frac{20}{144} \quad p_{X^*Y^*}(x_1, y_2) = \frac{15}{144} \quad p_{X^*Y^*}(x_1, y_3) = \frac{25}{144}$$

$$p_{X^*Y^*}(x_2, y_1) = \frac{20}{144} \quad p_{X^*Y^*}(x_2, y_2) = \frac{15}{144} \quad p_{X^*Y^*}(x_2, y_3) = \frac{25}{144}$$

$$p_{X^*Y^*}(x_3, y_1) = \frac{8}{144}0 \quad p_{X^*Y^*}(x_3, y_2) = \frac{6}{144} \quad p_{X^*Y^*}(x_3, y_3) = \frac{10}{144}.$$

Problema 5 (6 punti: 1.5 ciascuno ad a,b,c,d)
1)Si fanno tre lanci consecutivi di un dado normale. Calcolare le seguenti probabilità:

- a)probabilità che esca due volte 6 e una volta 1:$\frac{3}{216}$
- b)probabilità che la seconda volta esca lo stesso numero della prima:$\frac{1}{6}$
- c)probabilità che ogni volta esca lo stesso numero:$\frac{1}{36}$
- d)probabilità che l'esito massimo sia 3:$\frac{19}{216}$

Problema 6 (6 punti, 1.5 punti ciascuno) Trovare la media, la moda, la mediana e la varianza del seguente insieme di dati (una cifra decimale per difetto):

9	12	8	7	14	12	7
1	11	8	15	1	7	14
1	5	8	7	6	5	2

Media=$7,6$ Moda=7 Mediana=7 Varianza=$17,9$