COGNOME E NOME

Prova in itinere di Matematica ed Elementi di Statistica (31-10-2003)

Problema 1 (6 punti, 3 punti ciascuno) Un test diagnostico con specificità e sensibilità del 96% viene applicato come screening di massa. Sapendo che la prevalenza della malattia all'interno del gruppo in esame è del 3%, calcolare:

a) La probabilità di non avere la malattia se il test ha dato risultato negativo.

b) la probabilità di avere la malattia se il test ha dato risultato positivo.

Ricordo le definizioni:

Specificità= probabilità che il test dia esito negativo in un soggetto sano; Sensibilità= probabilità che il test dia esito positivo in un soggetto malato; Prevalenza= percentuale di soggetti malati nell'intera popolazione

- Risposta a)$\frac{96 \cdot 97}{96 \cdot 97 + 4 \cdot 3} = 0,99$
- Risposta b)$\frac{96 \cdot 3}{96 \cdot 3 + 4 \cdot 97} = 0,42$

Problema 2 (4 punti)

Una variabile statistica X è normale di media 1 e deviazione standard 1.5. Calcolare le seguenti frequenze:

- a) $f\{t \text{ t.c. } -1 < X(t) < 1\}$ =$0,4082$
- b) $f\{t \text{ t.c. } -3 < X(t) < 3\}$ =$0,9043$
- c) $f\{t \text{ t.c. } X(t) < 2\}$ =$0,7454$
- d) $f\{t \text{ t.c. } X(t) = -1\}$ =0

Problema 3 (4 punti: 2 punti ciascuno) Definiamo **concentrazione di una soluzione il rapporto tra il peso del soluto e il peso della soluzione**.

1) Sono dati 4 kg. di soluzione. Sapendo che aggiungendo 60 grammi di soluto si ottiene una soluzione concentrata al 3%, calcolare la concentrazione iniziale (in percentuale, con una cifra decimale per difetto).

2)Date due soluzioni dello stesso soluto e dello stesso solvente di cui la prima al 2%, mescolandole un uguale peso della prima e della seconda si ottiene una soluzione al 4%. Calcolare la concentrazione della seconda (in percentuale, con una cifra decimale per difetto).

- Risposta 1)Concentrazione iniziale=1.5%
- Risposta 2)Concentrazione della seconda soluzione =6%

Problema 4 (8 punti:1 ciascuno a 2 e 3 e 1.5 agli altri) Siano X ed Y due variabili statistiche; X assume i valori $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ ed $x_3 = -3$, Y assume i valori $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ ed $y_3 = 3$. Supponiamo che le frequenze relative congiunte di X ed Y siano

$$p_{XY}(x_1, y_1) = \tfrac{1}{10} \quad p_{XY}(x_1, y_2) = \tfrac{2}{10} \quad p_{XY}(x_1, y_3) = 0$$

$$p_{XY}(x_2, y_1) = \tfrac{3}{10} \quad p_{XY}(x_2, y_2) = \tfrac{1}{10} \quad p_{XY}(x_2, y_3) = \tfrac{1}{10}$$

$$p_{XY}(x_3, y_1) = 0 \quad p_{XY}(x_3, y_2) = 0 \quad p_{XY}(x_3, y_3) = \tfrac{2}{10}\,.$$

1. Dire, giustificando la risposta, se X ed Y sono indipendenti.
2. Calcolare le frequenze marginali $p_Y(y_1)$, $p_Y(y_2)$ e $p_Y(y_3)$.
3. Calcolare le frequenze marginali $p_X(x_1)$, $p_X(x_2)$ e $p_X(x_3)$.
4. Calcolare la speranza di X.
5. Calcolare la speranza di $X + Y$.
6. Scrivere la tabella delle frequenze relative congiunte di due variabili statistiche X^* ed Y^* indipendenti, con le stesse frequenze marginali di X ed Y.

- Risposta 1.NO perche per esempio $p_{XY}(x_1, y_1) = \frac{1}{10} \neq \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10}$
- Risposta 2.$p_Y(y_1) = \frac{4}{10}$, $p_Y(y_2) = \frac{3}{10}$ e $p_Y(y_3) = \frac{3}{10}$.
- Risposta 3.$p_X(x_1) = \frac{3}{10}$ $p_X(x_2) = \frac{5}{10}$ e $p_X(x_3) = \frac{2}{10}$.
- Risposta 4.$E(X) = \frac{3}{10} \cdot (-1) + \frac{5}{10} \cdot 2 + \frac{2}{10} \cdot (-3) = \frac{1}{10}$
- Risposta 5.$E(Y) = \frac{4}{10} \cdot (1) + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{3}{10} \cdot (3) = \frac{19}{10}$ quindi $E(X + Y) = \frac{1}{10} \cdot (1) + \frac{19}{10} = 2$
- Risposta 6.

$$p_{X^*Y^*}(x_1, y_1) = \tfrac{12}{100} \quad p_{X^*Y^*}(x_1, y_2) = \tfrac{9}{100} \quad p_{X^*Y^*}(x_1, y_3) = \tfrac{9}{100}$$

$$p_{X^*Y^*}(x_2, y_1) = \tfrac{20}{100} \quad p_{X^*Y^*}(x_2, y_2) = \tfrac{15}{100} \quad p_{X^*Y^*}(x_2, y_3) = \tfrac{15}{100}$$

$$p_{X^*Y^*}(x_3, y_1) = \tfrac{8}{100}0 \quad p_{X^*Y^*}(x_3, y_2) = \tfrac{6}{100} \quad p_{X^*Y^*}(x_3, y_3) = \tfrac{6}{100}\,.$$

Problema 5 (6 punti: 1.5 ciascuno ad a,b,c,d)
1)Si fanno tre lanci consecutivi di un dado normale. Calcolare le seguenti probabilità:

- a)probabilità che esca due volte 5 e una volta 4:$\frac{3}{216}$
- b)probabilità che la seconda volta esca il numero che è uscito la prima aumentato di 2::$\frac{4}{36}$
- c)probabilità che ogni volta esca il numero della precedente volta aumentato di 2:$\frac{2}{216}$
- d)probabilità che l'esito minimo sia uguale all'esito massimo:$\frac{6}{216}$

Problema 6 (6 punti, 1.5 punti ciascuno) Trovare la media, la moda, la mediana e la varianza del seguente insieme di dati(una cifra decimale per difetto):

4	7	10	9	15	12	7
2	11	12	10	10	5	14
1	14	8	4	6	5	8

Media$=8,2$ Moda$=10$ Mediana$=8$ Varianza$=\frac{1756}{21}-67,2=83,6-67,2=16,4$