

COGNOME E NOME

Prova in itinere di Matematica ed Elementi di Statistica (31-10-2003)

Problema 1 (6 punti, 3 punti ciascuno) Un test diagnostico con specificità e sensibilità del 98% viene applicato come screening di massa. Sapendo che la prevalenza della malattia all'interno del gruppo in esame è del 4%, calcolare:

- La probabilità di non avere la malattia se il test ha dato risultato negativo.
- la probabilità di avere la malattia se il test ha dato risultato positivo.

Ricordo le definizioni:

Specificità= probabilità che il test dia esito negativo in un soggetto sano; Sensibilità= probabilità che il test dia esito positivo in un soggetto malato; Prevalenza= percentuale di soggetti malati nell'intera popolazione

- Risposta a) $\frac{98 \cdot 96}{98 \cdot 96 + 2 \cdot 4} = 0,99$
- Risposta b) $\frac{98 \cdot 4}{98 \cdot 4 + 2 \cdot 96} = 0,67$

Problema 2 (4 punti)

Una variabile statistica X è normale di media -2 e deviazione standard 2.5. Calcolare le seguenti frequenze:

- a) $f\{t \text{ t.c. } 0 < X(t) < 2\} = 0,1571$
- b) $f\{t \text{ t.c. } -2 < X(t) < 4\} = 0,4918$
- c) $f\{t \text{ t.c. } X(t) > -3\} = 0,6554$
- d) $f\{t \text{ t.c. } X(t) = -3\} = 0$

Problema 3 (4 punti: 2 punti ciascuno) Definiamo **concentrazione di una soluzione il rapporto tra il peso del soluto e il peso della soluzione.**

1) Sono dati 4 kg. di soluzione. Sapendo che aggiungendo 40 grammi di soluto si ottiene una soluzione concentrata al 3%, calcolare la concentrazione iniziale (in percentuale, con una cifra decimale per difetto).

2) Date due soluzioni dello stesso soluto e dello stesso solvente di cui la prima al 6%, mescolandole un peso della prima doppio di quello della seconda si ottiene una soluzione al 5%. Calcolare la concentrazione della seconda (in percentuale, con una cifra decimale per difetto).

- Risposta 1) Concentrazione iniziale = 2.1%
- Risposta 2) Concentrazione della seconda soluzione = 3%

Problema 4 (8 punti:1 ciascuno a 2 e 3 e 1.5 agli altri) Siano X ed Y due variabili statistiche; X assume i valori $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ed $x_3 = 3$, Y assume i valori $y_1 = -1$, $y_2 = 2$ ed $y_3 = -3$. Supponiamo che le frequenze relative congiunte di X ed Y siano

$$p_{XY}(x_1, y_1) = \frac{1}{12} \quad p_{XY}(x_1, y_2) = \frac{2}{12} \quad p_{XY}(x_1, y_3) = \frac{2}{12}$$

$$p_{XY}(x_2, y_1) = \frac{3}{12} \quad p_{XY}(x_2, y_2) = \frac{1}{12} \quad p_{XY}(x_2, y_3) = \frac{1}{12}$$

$$p_{XY}(x_3, y_1) = 0 \quad p_{XY}(x_3, y_2) = 0 \quad p_{XY}(x_3, y_3) = \frac{2}{12}.$$

1. Dire, giustificando la risposta, se X ed Y sono indipendenti.
2. Calcolare le frequenze marginali $p_Y(y_1)$, $p_Y(y_2)$ e $p_Y(y_3)$.
3. Calcolare le frequenze marginali $p_X(x_1)$, $p_X(x_2)$ e $p_X(x_3)$.
4. Calcolare la speranza di X .
5. Calcolare la speranza di $X + Y$.
6. Scrivere la tabella delle frequenze relative congiunte di due variabili statistiche X^* ed Y^* indipendenti, con le stesse frequenze marginali di X ed Y .

- Risposta 1.NO perche per esempio $p_{XY}(x_1, y_1) = \frac{1}{12} \neq \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12}$
- Risposta 2. $p_Y(y_1) = \frac{4}{12}$, $p_Y(y_2) = \frac{3}{12}$ e $p_Y(y_3) = \frac{5}{12}$.
- Risposta 3. $p_X(x_1) = \frac{5}{12}$ $p_X(x_2) = \frac{5}{12}$ e $p_X(x_3) = \frac{2}{12}$.
- Risposta 4. $E(X) = \frac{5}{12} \cdot 1 + \frac{5}{12} \cdot 2 + \frac{2}{12} \cdot 3 = \frac{21}{12}$
- Risposta 5. $E(Y) = \frac{4}{12} \cdot (-1) + \frac{3}{12} \cdot 2 + \frac{5}{12} \cdot (-3) = -\frac{13}{12}$ dunque $E(X + Y) = \frac{8}{12}$
- Risposta 6.

$$p_{X^*Y^*}(x_1, y_1) = \frac{20}{144} \quad p_{X^*Y^*}(x_1, y_2) = \frac{15}{144} \quad p_{X^*Y^*}(x_1, y_3) = \frac{25}{144}$$

$$p_{X^*Y^*}(x_2, y_1) = \frac{20}{144} \quad p_{X^*Y^*}(x_2, y_2) = \frac{15}{144} \quad p_{X^*Y^*}(x_2, y_3) = \frac{25}{144}$$

$$p_{X^*Y^*}(x_3, y_1) = \frac{8}{144} \cdot 0 \quad p_{X^*Y^*}(x_3, y_2) = \frac{6}{144} \quad p_{X^*Y^*}(x_3, y_3) = \frac{10}{144}.$$

Problema 5 (6 punti: 1.5 ciascuno ad a,b,c,d)

1)Si fanno tre lanci consecutivi di un dado normale. Calcolare le seguenti probabilità:

- a)probabilità che esca due volte 2 e una volta 3: $\frac{3}{216}$
- b)probabilità che la seconda volta esca il numero triplo di quello che è uscito la prima: $\frac{2}{36}$
- c)probabilità che ogni volta esca un numero triplo della precedente:0
- d)probabilità che l'esito massimo sia 2: $\frac{7}{216}$

Problema 6 (6 punti, 1.5 punti ciascuno) Trovare la media, la moda, la mediana e la varianza del seguente insieme di dati (una cifra decimale per difetto):

7 7 8 9 15 12 7
 8 11 5 14 1 7 14
 1 1 8 12 6 5 2

Media=7,6 Moda=7 Mediana=7 Varianza=18