Variabili aleatorie definite su un prodotto, leggi marginali

Vogliamo estendere (sempre nel caso in cui Ω è finito), il concetto di variabile aleatoria a funzioni a valori più in generale su $\mathbf{R^2}$ o ancora più in generale su uno spazio prodotto:

Definizione 1 - *Una variabile aleatoria è una qualunque funzione definita su Ω a valori nello spazio prodotto $\mathbf{R^2}$.*

Se $Z = (X, Y)$ è una variabile aleatoria a valori in $\mathbf{R^2}$ e $z = (x, y) \in \mathbf{R^2}$, si ha :

$$\{Z = z\} = \{X = x\} \cap \{Y = y\}$$

Indichiamo con $z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(n)}$ i valori assunti da Z e con

$$p(z^{(k)}) = p\{Z = z^{(k)}\}.$$

Come abbiamo già visto nel caso di variabili aleatorie a valori reali, possiamo vedere $W = \mathbf{R^2}$ come uno spazio di probabilità. Più precisamente, abbiamo che $(W, P(W)), p_X)$ è uno spazio di probabilità. Basta definire, dato $E \subseteq W$:

$$p_X(E) = p\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\}.$$

Si verifica facilmente che p_X è effettivamente una misura di probabilità.
Quindi, una variabile aleatoria a valori su $\mathbf{R}$ o su $\mathbf{R^2}$ induce su questi insiemi una misura di probabilità.
Consideriamo una variabile aleatoria Z a valori in $\mathbf{R^2}$. Disinteressan doci un attimo del fatto che $\mathbf{R^2}$ è un prodotto, è evidente che possiamo usare la solita definizione per trovare la legge di Z. Si ha semplicemente

$$p_Z(E) = p\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in E\}.$$

Tuttavia, essendo $\mathbf{R^2}$ un prodotto, assegnare Z equivale ad assegnare due funzioni a valori in $\mathbf{R}$:

$$X \ : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

e

$$Y \ : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

È allora legittimo chiedersi se ci sia una relazione tra le leggi di queste tre funzioni X, Y, Z.

Definizione 2 *Data Z , le leggi di X e Y vengono dette leggi marginali della legge di Z.*

Affrontiamo ora il problema se ci sia una relazione tra le leggi di X, Y e Z.
Dobbiamo fare attenzione al fatto che p_X e p_Y sono leggi definite risp. su $\mathbf{R}$, mentre p_Z è definita su $\mathbf{R^2}$. È evidente però che $p_X(E_1) = p_Z(E_1 \times \mathbf{R}$ e analogamente $p_Y(E_2) = p_Z(\mathbf{R} \times E_2)$.
Risulta allora evidente che, data p_Z, possiamo calcolarci facilmente p_X e p_Y.
Che non sia altrettanto facile la strada a rovescio lo si può vedere già dal fatto che p_Z è definita su tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{R^2}$ e non tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{R^2}$ sono del tipo $E_1 \times E_2$.

Esempio 1

$$E = \{(1,1),(2,2)\}$$

E non è del tipo $E_1 \times E_2$. Infatti dovrebbe essere $E_1 = \{1,2\}$ e $E_2 = \{1,2\}$, dunque $E_1 \times E_2 == \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$ che è falso.
Tuttavia questa è solo una difficoltà apparente e possiamo agevolmente superarla nel contesto semplice nel quale ci siamo messi e cioè con Ω finito. In ogni caso, anche qualora prendessimo $E = E_1 \times E_2$ non possiamo ricostruire $p_Z(E)$ dalla conoscenza di $p_X(E_1)$ e $p_Y(E_2)$.

Esempio 2 *Facciamo un esempio di due variabili aleatorie con leggi marginali uguali che danno luogo alla stessa legge congiunta. Da un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6 se ne estraggono 2 con rimpiazzo. Se indichiamo rispettivamente con X e Y i risultati delle due estrazioni e calcoliamo la variabile aleatoria $Z = (X,Y)$, i possibili valori di Z sono coppie (i,j) dove i e j possono prendere i valori interi da 1 a 6. Si tratta di 36 valori possibili e ciascuno è assunto con probabilità 1/36. Le leggi marginali X e Y sono leggi uniformi su $\{1,2,...,6\}$.*
Il successivo esperimento è la stessa estrazione ma senza rimpiazzo. Indichiamo rispettivamente con X_1, Y_1 i risultati delle due estrazioni e calcoliamo le leggi di

$$X_1,\ Y_1,\ e\ Z_1 = (X_1, Y_1)$$

I valori di Z non sono gli stessi, perchè ad esempio il risultato (1,1) non è più possibile. Sono quindi solo 30 i valori assunti da Z, tutti equiprobabili, e ciascuno ha probabilità 1/30. D'altra parte anche X_1, Y_1 hanno la legge uniforme .
Siamo dunque in presenza di due leggi congiunte diverse aventi le stesse marginali.

A questo punto osserviamo che se ci poniamo il problema di costruire p_Z conoscendo p_X e p_Y con l'ulteriore condizione che X e Y siano indipendenti, il problema ha un'unica soluzione (lo garantisce la definizione stessa di indipendenza) Infatti in tal caso

$$p_Z(E) = p_Z(E_1 \times E_2) = p_Z((E_1 \times Y) \cap (X \times E_2)) =$$

$$= p_Z(E_1 \times Y) \cdot p_Z(X \times E_2) = p_X(E_1) \cdot p_Y(E_2).$$

Esempio 3 *Sia $\Omega = \{a,b\}$ con $p(\omega) = \frac{1}{2}\ \ \forall \omega \in \Omega$. Siano $X(a) = 1,\ X(b) = 2,\ Y(a) = 3, Y(b) = 4$. Trovare p_Z assumendo che X e Y siano indipendenti.*