

COGNOME E NOME

Prima Prova in itinere di Matematica ed Elementi di Statistica 15-11-2002

Problema 1 (6 punti, 2 punti ciascuno)

Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{2x^3 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-x)}{x} = -1$$

Problema 2 (7 punti: 2 punti ciascuna per le prime due parti e 1 punto per ciascuna delle altre) Sono date le seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ |x - 1| & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

e

$$g(x) = x - 1$$

Scrivere le formula di $f(g(x))$ e quella di $g(f(x))$ Inoltre di $g(f(x))$ trovare il punto x_1 di minimo e il valore m_1 di minimo. Dire inoltre perché la funzione $g(f(x))$ non ha massimo.

•

$$f(g(x)) = \begin{cases} (x - 1)^2 & \text{se } x < 1 \\ |x - 2| & \text{se } 1 \leq x \end{cases}$$

•

$$g(f(x)) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 0 \\ |x - 1| - 1 & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

• $x_1 = 1$

- $g(f(x))$ non ha massimo perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = +\infty$.

Problema 3 (6 punti, 2 punti ciascuno) Calcolare le derivate delle seguenti funzioni nel punto indicato:

(a) $f(x) = -x^2 + 2x^{-2}$ $f'(1) = -6$

(b) $f(x) = (x^{-\pi} - 1)(x^2 + 2x - 1)$ $f'(1) = -2\pi$

(c) $f(x) = \frac{x^{-1}}{2x - 1}$ $f'(2) = -\frac{7}{36}$

Problema 4 (4 punti)

Dire perché la funzione $f(x) = -x^5 - x^3 - x + 1$ è invertibile su tutto \mathbf{R} e calcolare $(f^{-1})'(-2)$ (si osservi che $f(1) = -2$)

- f è invertibile perché $f'(x) = -5x^4 - 3x^2 - 1$ e negativa per ogni valore di x e quindi $f(x)$ è decrescente.
- $(f^{-1})'(-2) = -\frac{1}{9}$

Problema 5 (4 punti) Definiamo concentrazione di una soluzione il rapporto tra il peso del soluto e il peso della soluzione

- 1) Sono dati 3 kg. di soluzione (soluzione=soluto + solvente). Sapendo che aggiungendo 900 grammi di solvente la soluzione risulta concentrata al 25%, calcolare la concentrazione iniziale della soluzione.
- 2) È data una soluzione concentrata al 20%. Sapendo che aggiungendo 1000 grammi di soluto la soluzione risulta concentrata al 30%, calcolare il peso iniziale della soluzione.
- Risposta 1) 32.5%
- Risposta 2) 7 Kg.

Problema 6 (4 punti) In un grafico con scala logaritmica (sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate la scala è logaritmica)

- è rappresentata la retta di equazione $Y = -2X + 1$. Trovare il legame funzionale tra x e y dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$.
- Scrivere l'equazione della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = \sqrt{3x}$
- Risposta 1) $y = 10x^{-2}$
- Risposta 2) $Y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} \log_{10} 3$

Problema 7 (4 punti) Il tempo di dimezzamento dell'isotopo ^{13}N è di dieci minuti. Esprimete con approssimazione per difetto al minuto il tempo necessario affinché una certa quantità di ^{13}N si riduca al 6.25% della quantità iniziale.

- Tempo = 40 minuti